1 Die Funktion

$$f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \sin 1/t, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

ist *nicht* integrierbar.

2 Das Integral einer Regelfunktion, die nur auf einer abzählbaren Menge nicht verschwindet, ist Null.

3 Jeder Regelfunktion $f \in R_a^b$ sei die Funktion $f_-\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ ihrer linksseitigen und die Funktion $f_+\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ ihrer rechtsseitigen Grenzwerte zugeordnet, wobei wir $f_-(a) = f(a)$ und $f_+(b) = f(b)$ vereinbaren. Dann gilt:
a. f_- ist *linksseitig stetig* – das heißt, es gilt

$$f_-(c) = \lim_{t \nearrow c} f_-(t), \qquad c \in (a,b].$$

Analog ist f_+ *rechtsseitig stetig*. Außerdem sind f_- und f_+ ebenfalls Regelfunktionen.
b. Es gibt eine abzählbare Menge $S \subset [a,b]$, so dass $f_- = f = f_+$ auf $[a,b] \setminus S$.
c. Es gilt

$$\int_a^b f = \int_a^b f_- = \int_a^b f_+.$$

4 Sei $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung $Z = (t_0, .., t_n)$ mit *Feinheit* $\sup_{1 \leqslant k \leqslant n}(t_k - t_{k-1}) < \delta$. *Hinweis:* Man verwende die gleichmäßige Stetigkeit von f $_{7.44}$.

5 Eine Funktion ist genau dann stückweise stetig, wenn sie als Summe einer Treppenfunktion und einer stetigen Funktionen dargestellt werden kann.

1 Die Funktion

$$f:\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \sin 1/t, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

ist *nicht* integrierbar.

▹ *Lösung* Die Funktion f ist keine Regelfunktion, da bei $t = 0$ der rechtsseitige Grenzwert nicht existiert. Für $t_n = 1/(n\pi + \pi/2)$ zum Beispiel ist

$$f(t_n) = \sin(n\pi + \pi/2) = (-1)^n$$

nicht konvergent. ◃

2 Das Integral einer Regelfunktion, die nur auf einer abzählbaren Menge nicht verschwindet, ist Null.

▹ *Lösung* Sei f eine solche Regelfunktion. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi = \sum c_k \chi_{I_k}$ mit

$$\|\varphi - f\|_{[a,b]} < \varepsilon.$$

Da auf jedem der nichtentarteten Intervalle I_k die Funktion f wenigstens eine Nullstelle besitzt, folgt hieraus $|c_k| < \varepsilon$ für alle k und damit

$$J_a^b(\varphi) < \varepsilon(b-a).$$

Gilt also $\varphi_n \rightrightarrows f$, so gilt auch $J_a^b(\varphi_n) \to 0 = J_a^b(f)$. ◃

3 Jeder Regelfunktion $f \in R_a^b$ sei die Funktion $f_-:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ ihrer linksseitigen und die Funktion $f_+:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ ihrer rechtsseitigen Grenzwerte zugeordnet, wobei wir $f_-(a) = f(a)$ und $f_+(b) = f(b)$ vereinbaren. Dann gilt:

a. f_- ist *linksseitig stetig* – das heißt, es gilt

$$f_-(c) = \lim_{t \nearrow c} f_-(t), \qquad c \in (a,b].$$

Analog ist f_+ *rechtsseitig stetig*. Außerdem sind f_- und f_+ ebenfalls Regelfunktionen.

b. Es gibt eine abzählbare Menge $S \subset [a,b]$, so dass $f_- = f = f_+$ auf $[a,b] \setminus S$.

c. Es gilt

$$\int_a^b f = \int_a^b f_- = \int_a^b f_+.$$

▹ *Lösung* *a.* Für gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen gilt:

Gilt $f_n \rightrightarrows f$ auf $[a,b]$ und besitzen alle f_n linksseitige Grenzwerte, so auch f, und es gilt $(f_n)_- \rightrightarrows f_-$. Entsprechend für rechtsseitige Grenzwerte.

Der Beweis verläuft genau wie der Beweis über den Grenzwert gleichmäßig konvergenter Folgen stetiger Funktionen.

Betrachte nun eine Regelfunktion $f \in R_a^b$. Dann ist f gleichmäßiger Limes einer Folge von Treppenfunktionen, also

$$\varphi_n \rightrightarrows f.$$

Jede *Treppenfunktion* besitzt in jedem Punkt einseitige Grenzwerte, die $\varphi_{n,\pm}$ sind ebenfalls Treppenfunktionen, und diese sind rechts- respektive linksseitig stetig. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der (φ_n) gilt dann auch

$$\varphi_{n,\pm} \rightrightarrows f_\pm.$$

Daher sind $f_\pm$ rechts- respektive linksseitig stetige Regelfunktionen.
b. Sei S die höchstens abzählbare Menge von Unstetigkeitsstellen von f $_{10.8}$ in $[a,b]$. Auf $[a,b] \setminus S$ ist f stetig, somit gilt dort $f_- = f = f_+$.
c. Es sind $f_- - f$ und $f_+ - f$ Regelfunktionen, die nur in einer abzählbaren Menge von Null verschiedenen sind. Solche Funktionen aber haben Integral 0. ◂

4 Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung $Z = (t_0, .., t_n)$ mit Feinheit $\sup_{1 \leqslant k \leqslant n}(t_k - t_{k-1}) < \delta$. *Hinweis:* Man verwende die gleichmäßige Stetigkeit von f $_{7.44}$.

▹ *Lösung* Wegen der *gleichmäßigen* Stetigkeit von f auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ $_{7.44}$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon/(b-a), \qquad |u - v| < \delta, \quad u, v \in [a,b].$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) \right| \\
&\quad = \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t_k) \right| \\
&\quad = \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f - f(t_k)) \right| \leqslant \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f - f(t_k)|.
\end{aligned}$$

Ist also die Feinheit der Zerlegung Z kleiner als δ, so ist $|f - f(t_k)| < \varepsilon/(b-a)$ in jedem Integral , und es folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) \right| &< \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\varepsilon}{b-a} \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

5 Eine Funktion ist genau dann stückweise stetig, wenn sie als Summe einer Treppenfunktion und einer stetigen Funktionen dargestellt werden kann.

▹▸ *Lösung* $\Leftarrow$ Das ist klar.
$\Rightarrow$ Es genügt, den Fall einer stückweise stetigen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit einer Sprungstelle in $c \in (a,b)$ zu betrachten. Die Funktion sei also stetig auf $[a,c)$ und $(c,b]$ und besitze einseitige Grenzwerte im Punkt c. Setze dann

$$h_\pm = f(c) - f_\pm(c).$$

Dann ist die Funktion

$$\varphi = f + h_- \chi_{[a,c)} - h_+ \chi_{(c,b]}$$

auch im Punkt c stetig, und zwar mit Wert $f(c)$. Also ist

$$f = \varphi - \tau, \qquad \tau = h_- \chi_{[a,c)} - h_+ \chi_{(c,b]}$$

eine geeignete Darstellung. ◂◃