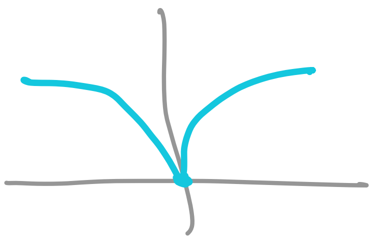
1 Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\underbrace{\dot{x} = |x|^{\alpha}}_{\geq 0}, \quad x(0) = 0,$$

mit $\alpha \geqslant 0$. Welche Existenz- und Eindeutigkeitssätze lassen sich anwenden? Wann sind Lösungen nicht eindeutig?

1. $0 \le \alpha < 1$: $|x|^\alpha$ nicht Lipschitz, aber stetig.



Peano ✓ $\varphi(t) \equiv 0$ eine Lösung.

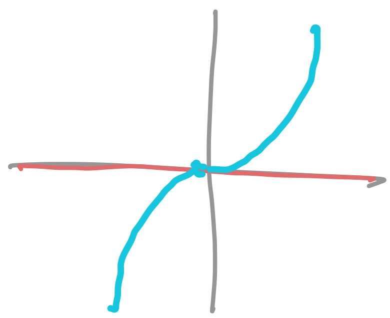
Zweite Lsg: Ansatz: $\varphi(t) = c\,t^k$

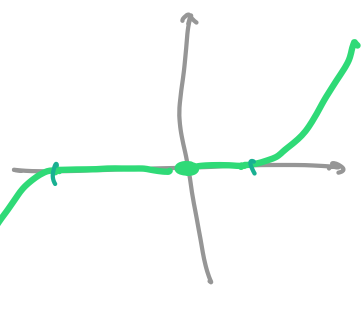
... $\dot{\varphi} = c k\, t^{k-1} \overset{!}{=} (c t^k)^\alpha = c^\alpha t^{\alpha k}$

$\Rightarrow k - 1 = \alpha k$

$\Rightarrow k = \frac{1}{1-\alpha}$ ✓

$$\varphi(t) = \begin{cases} c\, t^k, & t \geq 0 \\ -c\,|t|^k, & t < 0 \end{cases}$$





$\alpha \geq 1$: $|x|^\alpha$ Lipschitz-stetig $\longrightarrow$ Schranke für E-Satz anwenden.

Die einzige Lösung ist $\varphi(t) \equiv 0$.

2 Man bestimme die ersten beiden nicht-trivialen Picard-Lindelöf Iterationen zu den Anfangswertproblemen

a. $$\dot{x} = 1 + tx^2, \qquad x(0) = 0$$

und

b. $$\dot{x} = (t^2 x_2 - x_1 x_2^2, x_1^3 - x_2 + t)^\top, \qquad x(0) = 0.$$

a. $\dot{x} = 1 + tx^2$: $v(t,x) = 1 + tx^2$:

$$(T\varphi)(t) = \cancel{x_0}^{=0} + \int_0^t v(s, \varphi(s))\, ds = \int_0^t (1 + s\,\varphi(s)^2)\, ds$$

Anfangswert aus AWPs.

Startwert für Iteration $\longrightarrow$ $\varphi_0 \equiv x_0 \equiv 0$.

$$\varphi_1 = \int_0^t (1 + s \cdot 0^2)\, ds = t$$

$$\varphi_2 = \int_0^t (1 + s \cdot (s^2))\, ds = \int_0^t (1 + s^3)\, ds = t + \frac{1}{4} t^4.$$

grad $\varphi_n \leq$? .

6.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} t^2 x_2 - x_1 x_2^2 \\ x_1^3 - x_2 + t \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Vektorfeld: $(x, y) = (x_1, x_2)$:

$$v = v(t, x, y) = \begin{pmatrix} t^2 y - x y^2 \\ x^3 - y + t \end{pmatrix}$$

AW $x_0 = 0$. Res:

$$\varphi_0 \equiv 0.$$

2 Komponenten

$$T\varphi(t) = \int_0^t v(s, \varphi(s))\, ds$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^t v(s, 0, 0)\, ds$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} t^2 \end{pmatrix}, \quad ✓$$

$$\varphi_2(t) = \int_0^t v(s, 0, \tfrac{1}{2} s^2)\, ds$$

$$= \begin{pmatrix} t^2 y - \cancel{x y^2} \\ \cancel{x^3} - y + t \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} s^2 \cdot \frac{1}{2} s^2 \\ -\frac{1}{2} s^2 + s \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_0^t \left(\frac{s^4}{2} - \frac{1}{2}s^2 + s \right) ds$$

$$= \left(\frac{t^5}{10} \quad \frac{1}{2}t^2 - \frac{t^3}{6} \right). \quad \checkmark$$

3 Der sogenannte *Integralkern*

$$k: \ [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

sei stetig und

$$\gamma := \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |k(x,y)| \,\mathrm{d}y.$$

Ist $\gamma < 1$, so hat die Gleichung

$$f(x) - \int_0^1 k(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y = g(x), \qquad x \in [0,1],$$

für jedes $g \in C([0,1])$ genau eine Lösung $f \in C([0,1])$. Für diese gilt außerdem

$$\boxed{\|f\|_{[0,1]} \leqslant \frac{1}{1-\gamma} \|g\|_{[0,1]}.}$$

Fixpunktproblem:

$$f(x) = g(x) + \int_0^1 k(x,y) f(y) \,dy$$

$$\boxed{f = Tf := g + \int_0^1 k(\cdot,y) f(y) \,dy.}$$

Raum: $E = C([0,1])$ mit $\|\cdot\|_\infty$

Banachraum, Fixp.-Raum

Dann:

$$T : E \to E$$ ✓

Denn: f stetig $\to$ $k \cdot f$ stetig

$\to \int_0^1 k(\cdot,y) f(y) \,dy$ stetig

$\to g + \ldots$ stetig

Wähle: $X = E = C([0,1])$

Suche den Fixpunkt von

$$T : E \to E$$

Zu zeigen: T ist Kontraktion auf E
bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

<u>Kontraktion</u>:

$$(Tu - Tv)(x) = \int_0^1 k(x,y)\, u(y)\, dy - \int_0^1 k(x,y)\, v(y)\, dy$$

$$= \int_0^1 k(x,y)\,(u(y) - v(y))\, dy.$$

Dann

$$|(Tu - Tv)(x)| \le \int_0^1 |k(x,y)|\, \underbrace{|u(y) - v(y)|}_{\le \|u-v\|_\infty}\, dy$$

$$\le \|u-v\|_\infty \cdot \int_0^1 |k(x,y)|\, dy$$

$$\le \|u-v\|_\infty \cdot \underbrace{\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 \cdots}$$

$$= \|u-v\|_\infty \cdot \gamma$$

Also: $\gamma < 1 \longrightarrow T$ kontraktiv

$\longrightarrow$ ex. eindeutige Lsg f zu g.

Abschätzung:

$$f = Tf$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |g(x)| + \int_0^1 |k(x,y)|\, |f(y)|\, dy$$

$$\leq \|g\|_\infty + \int_0^1 |k(x,y)|\, \|f\|_\infty\, dy$$

$$\leq \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \cdot \gamma$$

für alle $x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty + \gamma \cdot \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-\gamma)}_{>0} \|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$$

✓