1 Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = |x|^{\alpha}, \quad x(0) = 0,$$

mit $\alpha \geqslant 0$. Welche Existenz- und Eindeutigkeitssätze lassen sich anwenden? Wann sind Lösungen nicht eindeutig?

2 Man bestimme die ersten beiden nicht-trivialen Picard-Lindelöf Iterationen zu den Anfangswertproblemen

$$\dot{x} = 1 + tx^2, \qquad x(0) = 0$$

und

$$\dot{x} = (t^2 x_2 - x_1 x_2^2, x_1^3 - x_2 + t)^\top, \qquad x(0) = 0.$$

3 Die Funktion $k\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Ist

$$\gamma \coloneqq \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |k(x,y)| \, \mathrm{d}y < 1,$$

so hat die Gleichung

$$f(x) - \int_0^1 k(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y = g(x), \qquad x \in [0,1],$$

für jedes $g \in C([0,1])$ genau eine Lösung $f \in C([0,1])$, und es gilt

$$\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-\gamma} \|g\|_{[0,1]}.$$

1 Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = |x|^{\alpha}, \quad x(0) = 0,$$

mit $\alpha \geqslant 0$. Welche Existenz- und Eindeutigkeitssätze lassen sich anwenden? Wann sind Lösungen nicht eindeutig?

▹ *Lösung*
a. Für $0 \leqslant \alpha < 1$ ist der Existenzsatz von Peano anwendbar, aber nicht der EE-Satz, da $|x|^{\alpha}$ im Punkt 0 nicht lipschitz ist. Neben der Lösung $x \equiv 0$ gibt es noch die Lösung

$$x(t) = \operatorname{sgn}(t)(t/\lambda)^{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{1}{1-\alpha}$$

sowie unendliche weitere Lösungen, die sich aus diesen beiden Lösungen so wie in der Vorlesung zusammensetzen lassen.
b. Für $\alpha \geqslant 1$ ist $|x|^{\alpha}$ lipschitz und damit der EE-Satz anwendbar. Die triviale Lösung $x \equiv 0$ ist auch die einzig mögliche. ◃

2 Man bestimme die ersten beiden nicht-trivialen Picard-Lindelöf Iterationen zu den Anfangswertproblemen

$$\dot{x} = 1 + tx^2, \qquad x(0) = 0$$

und

$$\dot{x} = (t^2 x_2 - x_1 x_2^2, x_1^3 - x_2 + t)^{\top}, \qquad x(0) = 0.$$

▹ *Lösung*
a. Das Vektorfeld ist eindimensional und zeitabhängig:

$$v(t,x) = 1 + tx^2, \qquad x \in \mathbb{R},$$

der zu iterierende Operator damit

$$(T\varphi)(t) = \int_0^t v(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s = \int_0^t (1 + s\varphi^2(s))\,\mathrm{d}s.$$

Mit $\varphi_0 = x_0 \equiv 0$ erhält man

$$\varphi_1(t) = \int_0^t (1 + s \cdot 0^2)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{d}s = t$$

und

$$\varphi_2(t) = \int_0^t (1 + s \cdot s^2)\,\mathrm{d}s = t + \frac{t^4}{4}.$$

b. Das Vektorfeld ist zweidimensional und zeitabhängig:

$$v(t,x,y) = \begin{pmatrix} t^2y - xy^2 \\ x^3 - y + t \end{pmatrix}.$$

Mit $x_0 \equiv 0$ und $y_0 \equiv 0$ erhält man

$$\varphi_1 = \int_0^t v(s,0,0)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2/2 \end{pmatrix}$$

und im zweiten Schritt

$$\varphi_2 = \int_0^t v(s,0,s^2/2)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \begin{pmatrix} s^4/2 \\ -s^2/2 + s \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 3t^5 \\ 15t^2 - 5t^3 \end{pmatrix}.$$ ◅

3 Die Funktion $k\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Ist

$$\gamma \coloneqq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,y)|\,\mathrm{d}y < 1,$$

so hat die Gleichung

$$f(x) - \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y = g(x), \qquad x \in [0,1],$$

für jedes $g \in C([0,1])$ genau eine Lösung $f \in C([0,1])$, und es gilt

$$\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\,\|g\|_{[0,1]}.$$

▹ *Lösung* Die Gleichung ist äquivalent zu

$$f(x) = g(x) + \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in [0,1]. \tag{†}$$

Wir suchen also einen Fixpunkt des Operators

$$Tf \coloneqq g + \int_0^1 k(\cdot,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

im Banachraum $E = C([0,1])$.

Wie man sich leicht überzeugt, gilt

$$T\colon E \to E,$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}(Tu - Tv)(x) &= \int_0^1 k(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 k(x,y)v(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 k(x,y)(u(y) - v(y))\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

also für jedes $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}|(Tu - Tv)(x)| &\leqslant \int_0^1 |k(x,y)|\,|u(y) - v(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \|u-v\|_\infty \int_0^1 |k(x,y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \gamma\,\|u-v\|_\infty.\end{aligned}$$

Also gilt auch

$$\|Tu - Tv\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |(Tu - Tv)(x)| \leqslant \gamma \|u - v\|_\infty .$$

Ist also $\gamma < 1$, so ist T eine Kontraktion auf ganz E, und Gleichung (†) besitzt eine eindeutige Lösung f.

Die Abschätzung für diese Lösung f ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \|Tf\|_\infty \\ &\leqslant \|Tf - T0\|_\infty + \|T0\|_\infty \\ &\leqslant \gamma \|f\|_\infty + \|g\|_\infty . \end{aligned}$$