1 Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend mit $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Dann existiert

$$\int_0^\infty f(t)\sin t\,\mathrm{d}t.$$

2 Für $a, b > 0$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,\mathrm{d}t = \log\frac{b}{a}.$$

3 Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ zeige man

$$\int_0^1 t^m \log^n t \, dt = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Hieraus folgt

$$\int_0^1 t^t \, dt = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

4 Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine im Punkt 0 stetige Regelfunktion. Dann gilt

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{h}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t^2+h^2}\,\mathrm{d}t = f(0).$$

5 Für $f \in C([0,\infty))$ mit $\lim_{t\to\infty} f(t) = 1$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} f(t)\, dt = 1.$$