1 Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend mit $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Dann existiert

$$\int_0^\infty f(t)\sin t \,\mathrm{d}t.$$

2 Für $a, b > 0$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,\mathrm{d}t = \log\frac{b}{a}.$$

3 Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ zeige man

$$\int_0^1 t^m \log^n t \,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Hieraus folgt

$$\int_0^1 t^t \,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

4 Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine im Punkt 0 stetige Regelfunktion. Dann gilt

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{h}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t^2+h^2}\,\mathrm{d}t = f(0).$$

5 Für $f \in C([0,\infty))$ mit $\lim_{t\to\infty} f(t) = 1$ gilt

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\varepsilon t} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

1 Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend mit $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Dann existiert

$$\int_0^\infty f(t)\sin t \,\mathrm{d}t.$$

▹ *Lösung* Die Folge

$$a_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t, \qquad n \geqslant 1,$$

ist alternierend und konvergiert betragsmäßig monoton gegen 0. Aufgrund des Leibnizkriteriums existiert daher

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^\infty a_k = s.$$

Da außerdem

$$\sup_{0\leqslant r\leqslant \pi} \int_{n\pi}^{n\pi+r} |f(t)\sin t|\,\mathrm{d}t \leqslant f(n\pi)\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t \to 0, \qquad n\to\infty,$$

gilt auch

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = s. \quad ◃$$

2 Für $a, b > 0$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,\mathrm{d}t = \log\frac{b}{a}.$$

▹ *Lösung* Das uneigentliche Integral bei Unendlich existiert aufgrund des Ergebnisses der vorangehenden Aufgabe, mit $f(t) = 1/t$. Bei 0 ist der Integrand stetig – l'Hospital –, so dass dort kein uneigentliches Integral vorliegt.

Dagegen existiert das Integral über $t^{-1}\cos at$ und $t^{-1}\cos bt$ bei 0 *nicht*. Für die Auswertung betrachten wir deshalb

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos at}{t}\,\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos bt}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Nach Substitution in den beiden Einzelintegralen wird

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon a}^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{\varepsilon b}^\infty \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Für $|t| \leqslant 1$ ist $|1-\cos t| \leqslant t^2$. Daher gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \log\frac{b}{a}. \quad ◃$$

3 Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ zeige man

$$\int_0^1 t^m \log^n t \,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Hieraus folgt

$$\int_0^1 t^t \,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

▷ *Lösung* Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^m \log^n t \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{m+1} t^{m+1} \log^n t \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 t^m \log^{n-1} t \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{n}{m+1} \int_0^1 t^m \log^{n-1} t \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Die Randterme fallen weg, da mit l'Hospital

$$\lim_{t\searrow 0} t \log^r t \to 0, \qquad r > 0.$$

Also folgt induktiv

$$\int_0^1 t^m \log^n t \,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} \int_0^1 t^m \,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Insbesondere gilt

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 t^n \log^n t \,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Nun ist

$$t^t = \mathrm{e}^{t \log t} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n \log^n t}{n!}.$$

Da die Exponenzialreihe auf kompakten Mengen gleichmäßig konvergiert, dürfen wir Summation und Integration vertauschen und erhalten

$$\int_0^1 t^t \,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n \log^n t \,\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$ ◁

4 Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine im Punkt 0 stetige Regelfunktion. Dann gilt

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{h}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t^2+h^2} \,\mathrm{d}t = f(0).$$

▷ *Lösung* Es ist

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{h}{h^2+t^2} \,\mathrm{d}t = \lim_{h\searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-1/h}^{1/h} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-r}^{r} = 1.$$

Also gilt

$$f(0) = \lim_{h\searrow 0} \frac{h}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(0)}{t^2+h^2} \,\mathrm{d}t,$$

und es genügt zu zeigen, dass

$$\lim_{h\searrow 0}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+t^2}(f(t)-f(0))\,\mathrm{d}t=0. \tag{†}$$

Sei $\varepsilon>0$. Dann existiert ein $\delta>0$, so dass $|f(t)-f(0)|<\varepsilon$ für $|t|<\delta$. Damit erhalten wir für das ›Mittelstück‹ des Integrals die Abschätzung

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{h}{h^2+t^2}\,|f(t)-f(0)|\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+t^2}\,\mathrm{d}t=\varepsilon,$$

und zwar für *alle* $h>0$. Fur die anderen zwei – zueinander symmetrischen – Teile des Integals benötigen wir nur noch $M=\sup_{-1\leqslant t\leqslant 1}|f(t)-f(0)|<\infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\int_{\delta}^{1}\frac{h}{h^2+t^2}\,|f(t)-f(0)|\,\mathrm{d}t\\&\qquad\leqslant M\int_{\delta}^{1}\frac{h}{h^2+t^2}\,\mathrm{d}t=M\int_{\delta/h}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{1+t^2}<\varepsilon\end{aligned}$$

für alle h hinreichend klein. Dasselbe gilt für das Integral über $[-1,-\delta]$. Also gilt (†). ◃

5 Für $f\in C([0,\infty))$ mit $\lim_{t\to\infty}f(t)=1$ gilt

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon t}f(t)\,\mathrm{d}t=1.$$

▹ *Lösung* Für die Funktionen φ_ε mit $\varphi_\varepsilon(t)=\varepsilon\mathrm{e}^{-\varepsilon t}$ gilt $\varphi_\varepsilon\geqslant 0$,

$$\int_{0}^{\infty}\varphi_\varepsilon(t)=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=1,$$

sowie für jedes $r>0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{r}\varphi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\varepsilon r}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty}\varphi_\varepsilon f\,\mathrm{d}t-1&=\int_{0}^{\infty}\varphi_\varepsilon f\,\mathrm{d}t-\int_{0}^{\infty}\varphi_\varepsilon\,\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{\infty}\varphi_\varepsilon(f-1)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{0}^{r}\varphi_\varepsilon(f-1)\,\mathrm{d}t+\int_{r}^{\infty}\varphi_\varepsilon(f-1)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Das Integral rechts wird klein für alle $\varepsilon>0$, wenn wir r hinreichend groß, da ja $f(t)\to 1$ für $t\to\infty$. Anschließend wird das linke Integral klein gemacht, indem ε klein gewählt wird. Beides zusammen ergibt

$$\int_{0}^{\infty}\varphi_\varepsilon f\,\mathrm{d}t-1\to 0,\qquad \varepsilon\to 0.$$ ◃