Wir betrachten noch zwei weitere Typen elementarer Differenzialgleichungen.

- **Die Bernoulli-Gleichung**

Diese hat die Gestalt

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^n$$

mit stetigen Koeffizientenfunktion und $n \in \mathbb{R}$. Der Exponent n muss also keine ganze oder natürliche Zahl sein. Mit $n = 0$ und $n = 1$ erhalten wir wieder die inhomogene respektive homogene lineare Differenzialgleichung, also nichts Neues. Daher sei

$$n \neq 0, \qquad n \neq 1.$$

Eine triviale Lösung ist $x \equiv 0$. Legen wir diese beiseite und nehmen $x \neq 0$ an, so führt die Substitution

$$y = x^{1-n}$$

zu einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung …

Subst: $y = x^{1-n}$

Dann:

$$\dot{y} = (1-n)\, x^{-n}\, \dot{x}$$

$$= (1-n)\, x^{-n} \left(a x + b x^n \right)$$

$$= (1-n) \left(a x^{1-n} + b \right)$$

$$= (1-n)\, a(t)\, y(t) + (1-n)\, b(t).$$

inhomogen, linear. Dann

$$x = \frac{1}{y^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Für $y > 0$, $n > 1$:

hat y Nullstelle:

$t \to t_0$ mit $y(t_0) = 0$,

dann: $x(t) \to \infty$.

Beispiel:

$$\dot{x} = a(t)\,x + b(t)\,x^2 \qquad n = 2$$

Dann $1-n = -1$: $\qquad y = \frac{1}{x}$

$$\dot{y} = -a(t)\,y - b(t).$$

Konkretes Beispiel: $\qquad (x \geq 0)$

$$\boxed{\dot{x} = \alpha x - \beta x^2, \qquad \alpha, \beta > 0,}$$

Verhulst-Gleichung: logistisches Wachstum.

Betrachte

$$\frac{\dot{x}}{x} = \alpha - \underline{\beta x}.$$

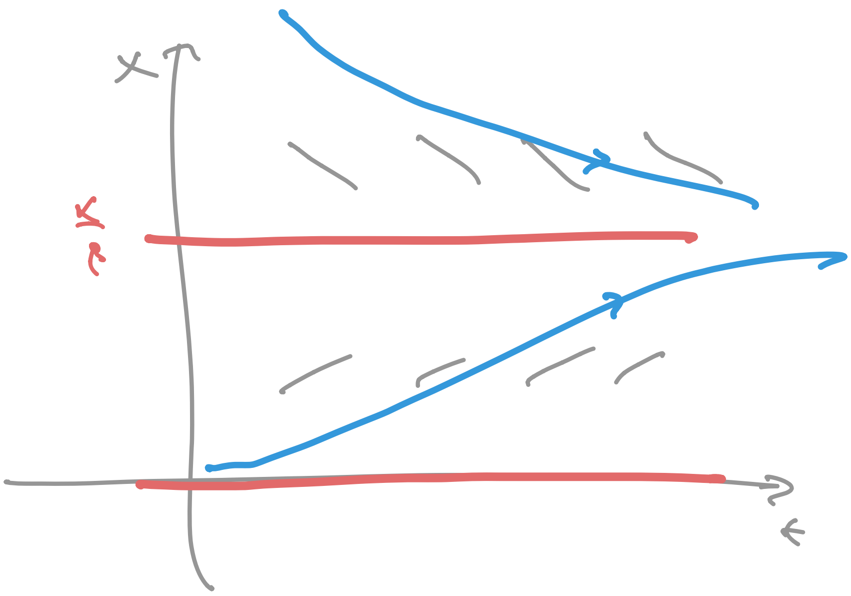
$x \sim 0$ $\quad \frac{\dot{x}}{x} \approx \alpha$ $\quad$ exponentielles W.

$x \gg 0$: $\quad \frac{\dot{x}}{x} = \alpha - \beta x$

Wachstum wird umgek. prop. zu Bev. grös.

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2$$

$$= \underbrace{x(\alpha - \beta x)}_{\text{FS bei } x=0,\ x = \frac{\alpha}{\beta}}$$



$n=2$: $\quad \dot{x} = \alpha x - \beta x^2$, $\quad x = \frac{1}{y}$:

$$\boxed{\dot{y} = -\alpha y + 1} \ \ldots$$

$x_* = \frac{\alpha}{\beta}$

$$x(t) = \frac{x_0 x_*}{x_0 + (x_* - x_0) e^{-\alpha t}} = \frac{x_0 e^{\alpha t}}{\frac{x_0}{x_*}(e^{\alpha t} - 1) + 1}$$

- **Die Riccati-Gleichung**

Diese hat die Gestalt

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^2 + h(t)$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen.

Für $h \equiv 0$ erhalten wir also eine Bernoulligleichung mit $n = 2$. Neben der Nulllösung erhalten wir mit der Substitution $y = 1/x$ alle weiteren Lösungen.

Für $h \not\equiv 0$ gibt es keinen allgemeinen Lösungsansatz. Kennt man allerdings eine partikuläre Lösung φ, so kommt man mit

$$y = x - \varphi$$

weiter ...

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \dot{x} - \dot{\varphi} \\
&= ax + bx^2 + \cancel{h} - a\varphi - b\varphi^2 - \cancel{h} \\
&= a(x-\varphi) + b(x^2-\varphi^2) \\
&= ay + by\underbrace{(x+\varphi)}_{y+2\varphi} \\
&= (a+2b\varphi)y + by^2
\end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{\dot{y} = (a+2b\varphi)\,y + by^2}$$

Beispiel :

$a(t) = 2t \quad b = 1 \quad c = 2$

$$\dot{x} = \underbrace{2tx + x^2}_{} + \underbrace{2}_{}$$

Ansatz : $\underline{\underline{-t^\alpha}}$? $\quad \alpha = -1$

$$\varphi = -\frac{1}{t} :$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{t^2} \overset{!}{=} \cancel{2t\left(-\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^2} + 2}$$

Für: $\quad y = x - \varphi = x + \frac{1}{t} :$

$$\dot{y} = (a + 2b\varphi)\, y + b y^2$$

$$= \left(2t - \frac{2}{t}\right) y + y^2 \qquad y = \frac{1}{z}$$

$$\dot{z} = \left(\frac{2}{t} - 2t\right) z - 1$$

Lemma :

1 Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = x^2 + 1 - t^2.$$

a. Skizzieren sie das Richtungsfeld unter Zuhilfenahme der *Isoklinen*, also der Kurven in der (t, x)-Ebene, in denen das Richtungsfeld konstante Steigung aufweist.
b. Bestimmen sie sämtliche Lösungen dieser Gleichung.
c. Welche Lösungen existieren auf einem unendlichen Zeitintervall, welche auf ganz $\mathbb{R}$?

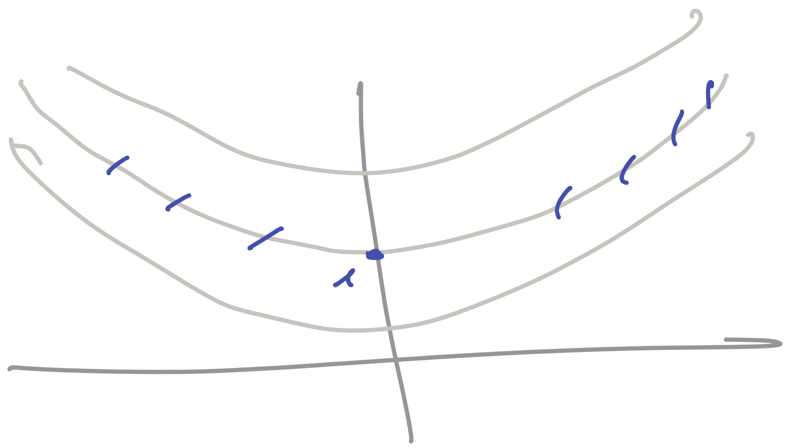
Riccati:

a:

$$\boxed{\dot{x} = x^2 + 1 - t^2} = \lambda$$

Iso:

$$x^2 = t^2 - 1 + \lambda$$



$$\dot{x} = 1 \cdot x^2 + \underbrace{(1 - t^2)}_{h(t)}$$

$g \equiv 1$ $q \equiv 0.$

Rechn: partikuläre Lösung?

$$\varphi(t) = t.$$

$$\dot\varphi = 1 = \varphi^2 + 1 - t^2$$
$$= t^2 + 1 - t^2 = 1 \checkmark$$

$$u = x - \varphi = x - t:$$

$$\dot u = (\cancel{\alpha} + 2\beta\varphi)u + \beta u^2$$
$$= 2tu + u^2$$

$$u = \frac{1}{v}$$

$$\boxed{\dot v = -2tv - 1.}$$

Homog: e^{-t^2}

Lösung:

$$v(t) = e^{-t^2}\left(c - \int_0^t e^{s^2} ds\right)$$
$$= c e^{-t^2} - \int_0^t e^{s^2 - t^2} ds$$

Damit:

$$\boxed{x(t) = u(t) + t = \frac{1}{v(t)} + t.}$$

c. [illegible]: $\varphi(t) = f$ [illegible] f

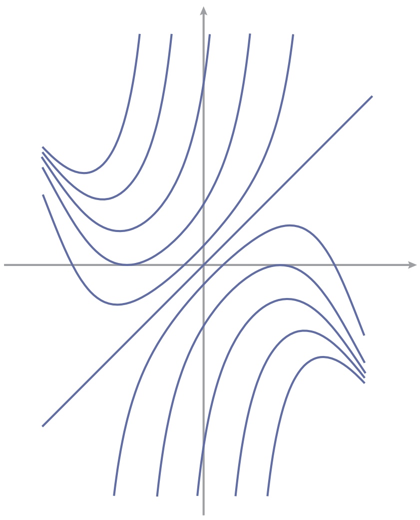
[illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

$$c = \underbrace{\int_0^f e^{s^2}\,ds}$$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] f_c:

[illegible] [illegible] f

Abb 1 Einige Lösungen



.