Wir betrachten noch zwei weitere Typen elementarer Differenzialgleichungen.

- **Die Bernoulli-Gleichung**

Diese hat die Gestalt

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^n$$

mit stetigen Koeffizientenfunktion und $n \in \mathbb{R}$. Der Exponent n muss also keine ganze oder natürliche Zahl sein. Mit $n = 0$ und $n = 1$ erhalten wir wieder die inhomogene respektive homogene lineare Differenzialgleichung, also nichts Neues. Daher sei

$$n \neq 0, \qquad n \neq 1.$$

Eine triviale Lösung ist $x \equiv 0$. Legen wir diese beiseite und nehmen $x \neq 0$ an, so führt die Substitution

$$y = x^{1-n}$$

zu einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung ...

- **Die Riccati-Gleichung**

Diese hat die Gestalt

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^2 + h(t)$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen.

Für $h \equiv 0$ erhalten wir also eine Bernoulligleichung mit $n = 2$. Neben der Nulllösung erhalten wir mit der Substitution $y = 1/x$ alle weiteren Lösungen.

Für $h \not\equiv 0$ gibt es keinen allgemeinen Lösungsansatz. Kennt man allerdings eine partikuläre Lösung φ, so kommt man mit

$$y = x - \varphi$$

weiter ...

1 Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = x^2 + 1 - t^2.$$

a. Skizzieren sie das Richtungsfeld unter Zuhilfenahme der *Isoklinen*, also der Kurven in der (t, x)-Ebene, in denen das Richtungsfeld konstante Steigung aufweist.
b. Bestimmen sie sämtliche Lösungen dieser Gleichung.
c. Welche Lösungen existieren auf einem unendlichen Zeitintervall, welche auf ganz $\mathbb{R}$?