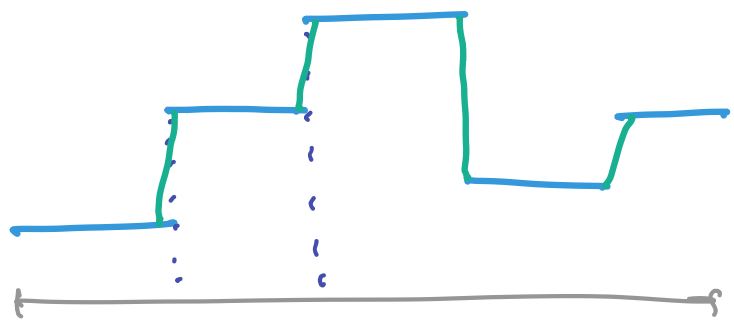
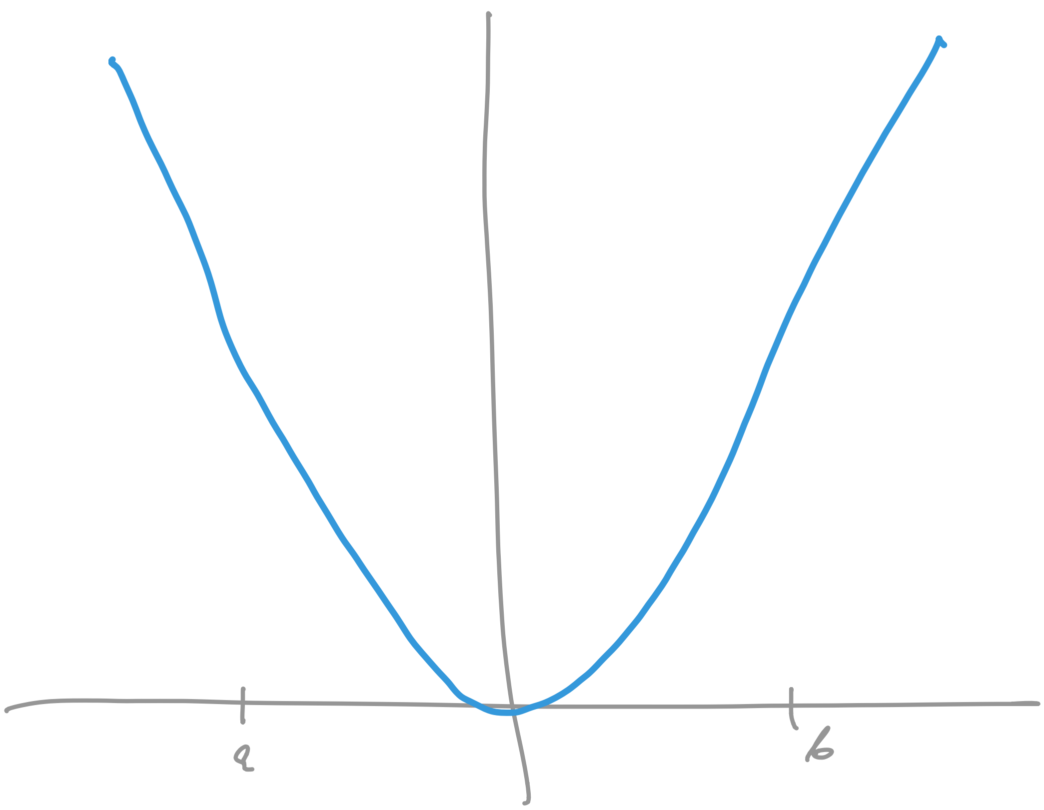
4. Ü 20. 5. 2021





Parametr. nach Bogenlänge :

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\|\dot\gamma(t)\|^2 = 1$$

$$\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle = 1$$

Falls $\gamma \in C^2$:

differenzieren : $\frac{d}{dt}$

$$0 = \frac{d}{dt} 1 = \underbrace{\frac{d}{dt} \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle}_{\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \dot\gamma_k^2(t)}$$

$$= 2 \langle \dot\gamma(t), \ddot\gamma(t) \rangle$$

Also :

$$\langle \dot\gamma, \ddot\gamma \rangle = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\dot\gamma \perp \ddot\gamma$$

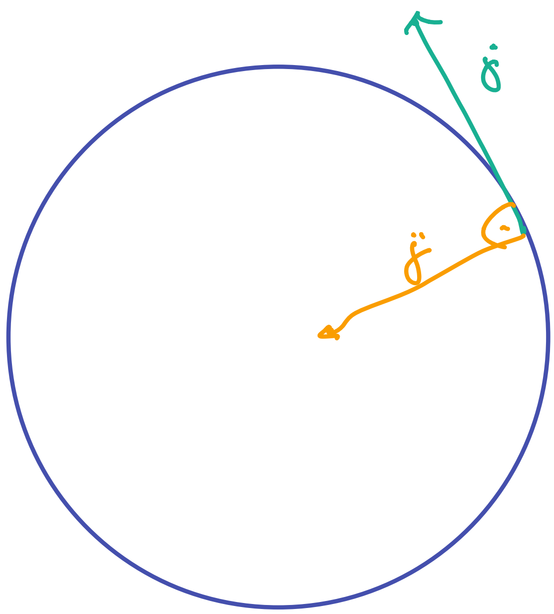
$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{m} \dot{y}_k^2(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{d}{dt}\left(\dot{y}_k^2(t) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} 2\, \dot{y}_k(t)\, \ddot{y}_k(t)$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \dot{y}_k(t) \cdot \ddot{y}_k(t)$$

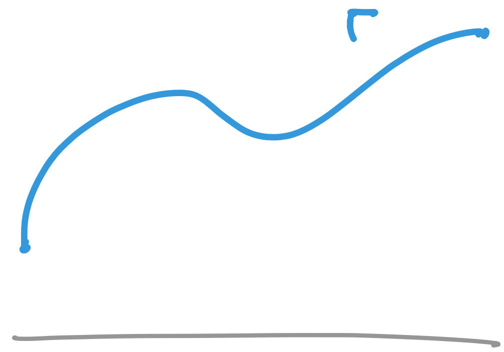
$$= 2 \cdot \langle \dot{y}(t), \ddot{y}(t) \rangle$$

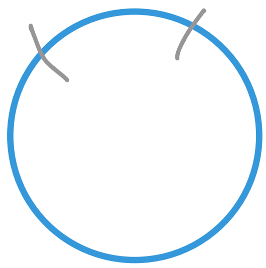


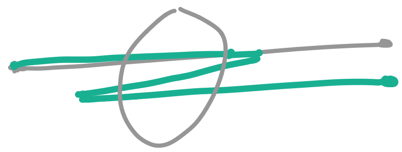
Ergänzungen

Spur als Graph

Satz *Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^r-Kurve. Dann existiert um jeden Punkt in I ein Intervall $J \subset I$, so dass die Spur von $\gamma|_J$ als Graph einer C^r-Funktion dargestellt werden kann.* ⋊







Bew.: Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ reguläre C^1-Kurve, also:

$$\dot\gamma(t) \neq 0, \quad t \in I$$

Sei $c \in I$ gegeben:

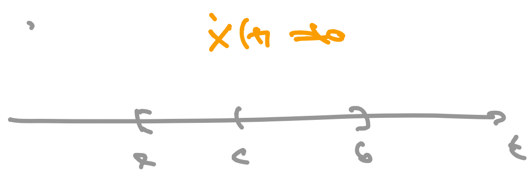
$$0 \neq \dot\gamma(c) = (\dot x(c), \dot y(c))$$

Also mindestens 1 Komponente $\neq 0$.

Sei o.E.: $\dot x(c) \neq 0$.

Dann existiert Intervall $[a,b] \subset I$:

$$a < c < b,$$
$$\dot x(t) \neq 0, \quad t \in [a,b]$$



Also: $x : [a,b] \to \mathbb{R}$
$$t \mapsto x(t)$$

ist streng monoton, also bijektiv,

$$x : [a,b] \to J \text{ bijektiv},$$

und

$$x^{-1} = \varphi : J \to [a,b]$$

ist ebenfalls C^1 : als Parametertr.

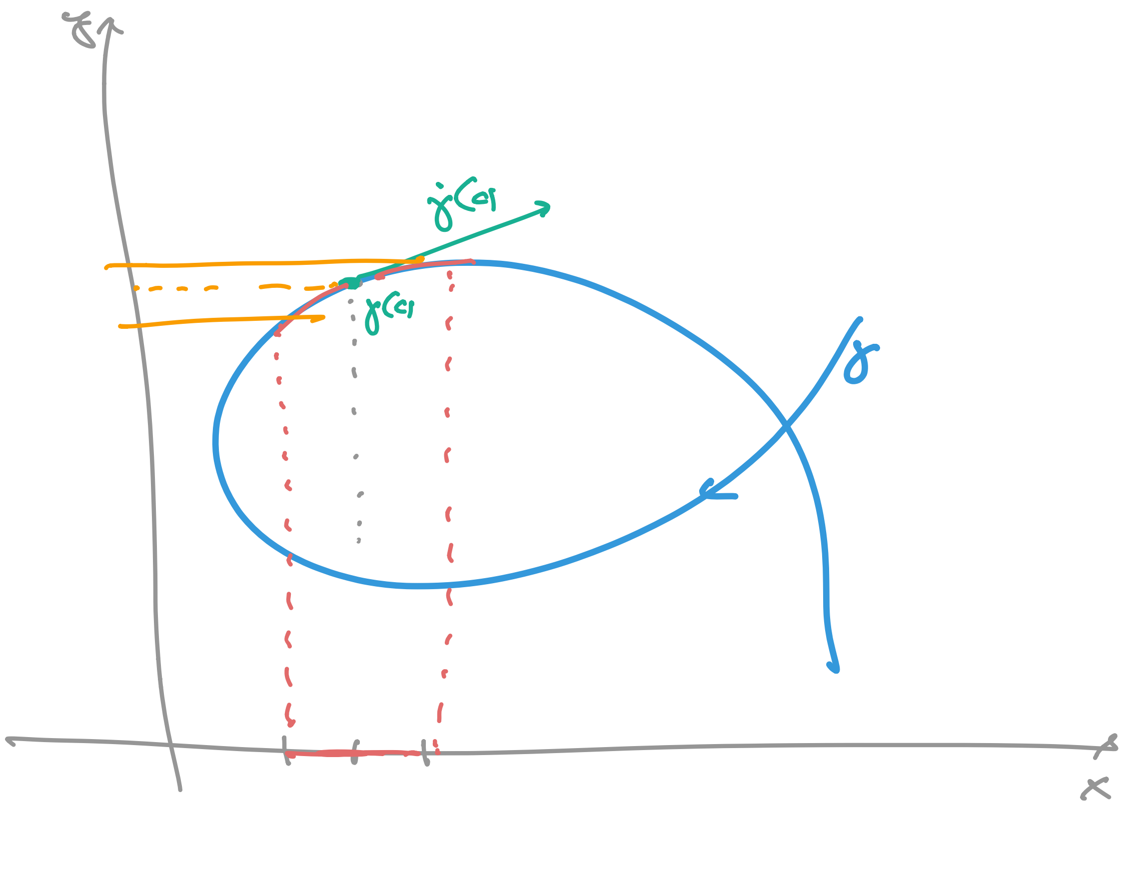
Dann gilt:

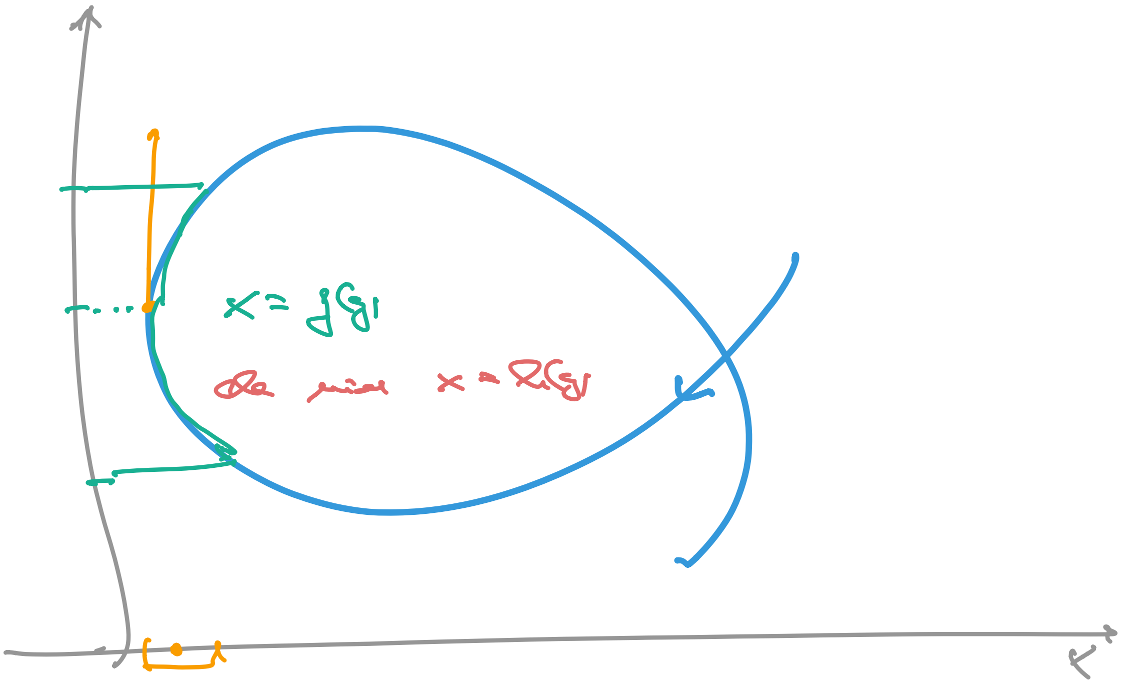
$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\tilde{\gamma}(s) = (\underbrace{x(\varphi(s))}, y(\varphi(s)))$$

$$= \underbrace{(s, (y\circ\varphi)(s))}$$

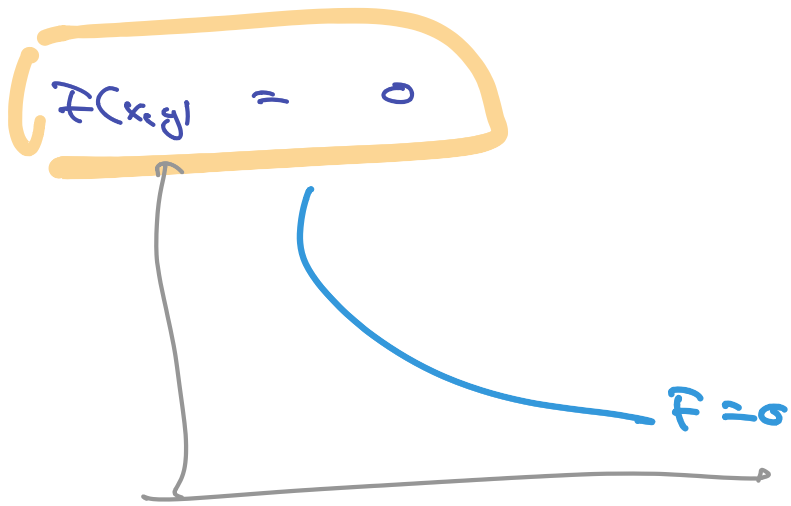
Also: Graph der Funktion $\underbrace{y\circ\varphi}$ über D.





Implizite Funktion:

$$\boxed{F(x,y) = 0}$$



Falls $\underline{\frac{d}{dx} F(x_0, y_0) \neq 0}$,

dann lokal $x = g(y)$ "auflösbar"

▪ Stückweise glatte Kurven und Wege

Definition *Sei $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Eine Kurve $\gamma \in C(I, E)$ heißt stückweise C^r, wenn es eine Teilung $T = (t_0 .., t_n)$ von I in Intervalle $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ gibt, so dass*

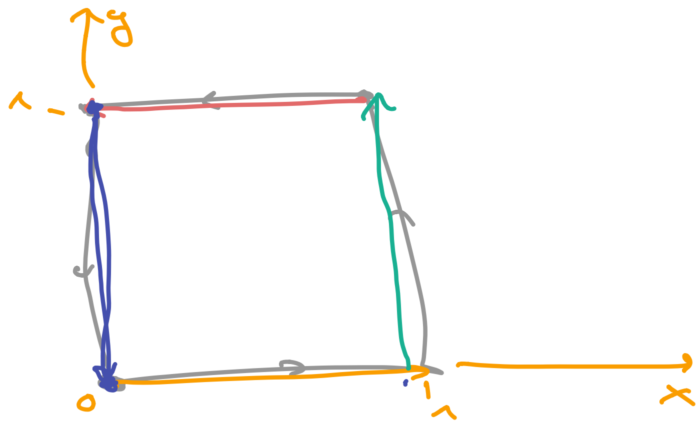
$$\gamma|_{I_k} \in C^r(I_k, E), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Die Klasse dieser Kurven wird mit $D^r(I, E)$ bezeichnet. ⋊

Parametrisierte Kurve:

$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\gamma(t) = [0, 1-t]$



$\gamma : I \longrightarrow E$ stetige Kurve.

"stückweise C^1":

es gibt $(t_0, t_1, \dots, t_n)$ Teilung von I

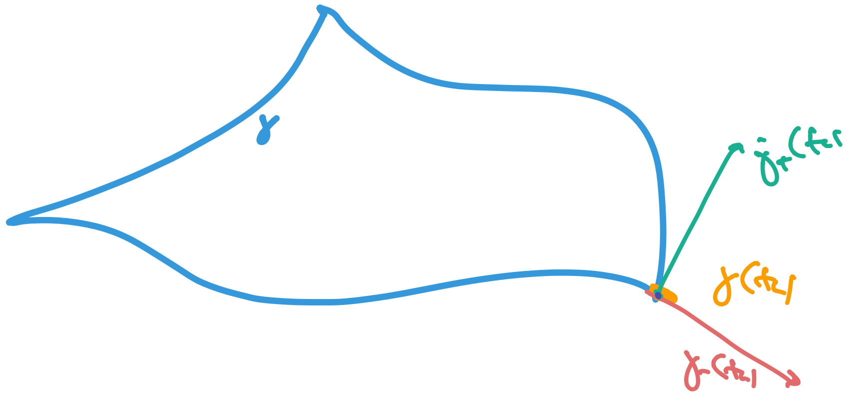
$I_k = [t_{k-1}, t_k]$

so dass

$\gamma|_{I_k} \in C^1(I_k, E)$

Der Randwert: es können sein

$\dot\gamma_+(t_{k-1})$
$\dot\gamma_-(t_k)$ } existieren:



Länge Formel stückweise glatte :

Ist γ stückweise C^1 $(\mathcal{D}^1)$

auf I :

$$L_I(\gamma) = \int_I \|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

Denn :

$$L_I(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} L_{I_k}(\gamma)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_n} \|\dot\gamma(t)\|\,dt .$$

Eine stückweise C^1-Kurve ist lipschitzstetig und damit rektifizierbar. Auch die Längenformel gilt unverändert.

Satz *Jede D^1-Kurve $\gamma : I \to E$ ist rektifizierbar, und es gilt*

$$L_I(\gamma) = \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_E \, \mathrm{d}t. \qquad \rtimes$$

Eine D^r-Kurve γ heißt *stückweise regulär*, wenn alle ihre C^r-Abschnitte regulär sind. Entsprechend heißt ein Weg ω *stückweise C^r* respektive *stückweise regulär*, wenn er wenigstens eine Parametrisierung γ mit entsprechenden Eigenschaften besitzt. Ein stückweise regulärer Weg besitzt eine stückweise reguläre Parametrisierung nach der Bogenlänge, $\eta : [0, l] \to E$, so dass $\|\dot{\gamma}(t)\|_E = 1$ mit Ausnahme endlich vieler Punkte.

1 Für die Kurve

$$\gamma:\ [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{cases} (t, t^2\cos(\pi/t^2)), & t > 0, \\ (0,0), & t = 0, \end{cases}$$

zeige man:

a. γ ist injektiv und differenzierbar.

b. γ ist nicht rektifizierbar.

a. injektiv gegeben, da 1. Komponente injektiv

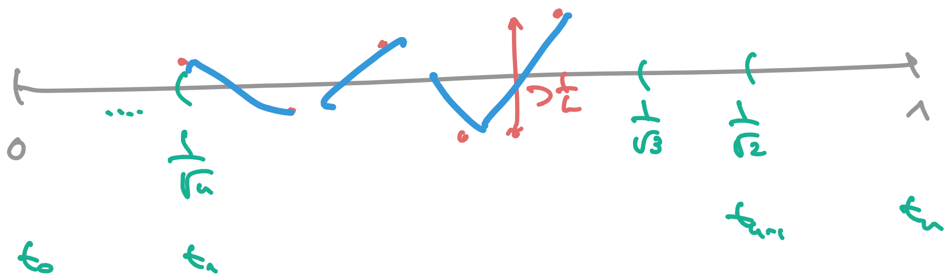
o.B.d.A. γ ist Graph der Funktion $f(t) = t^2 \cos\frac{\pi}{t^2}$.

Differenz.: für $t > 0$ ✓

Für $t = 0$:

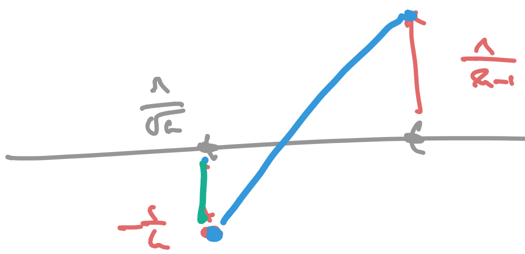
$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{1}{h} \cdot h^2 \cos\frac{\pi}{h^2} = h \cdot \cos\frac{\pi}{h^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

$|\cdot| \le 1$



$$\gamma\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{k}\cdot\cos(k\pi)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{(-1)^n}{k}\right)$$



$$\Sigma_T(\gamma) = \dots$$

$$\geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

2 *Peanokurve* Sei $u\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit

$$u(t+2) = u(t), \qquad u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1/3, \\ 1, & 2/3 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

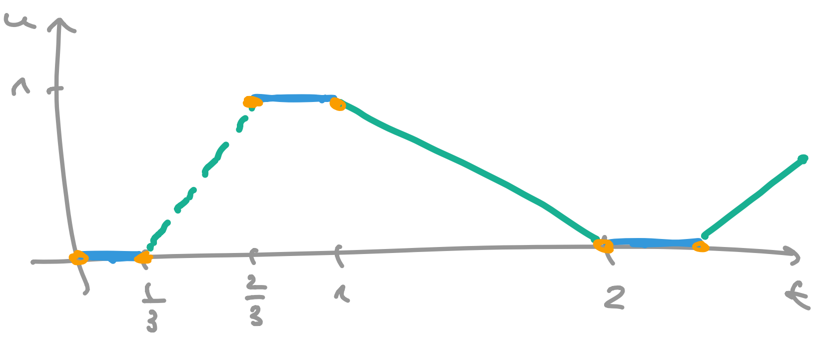
Definiere

$$\gamma(t) = \sum_{k\geqslant 0} 2^{-k-1}\gamma_0(9^k t), \qquad \boxed{\gamma_0(t) = (u(t), u(3t)).}$$

Dann bildet γ das Intervall $[0,1]$ surjektiv auf $[0,1]^2$ ab.

$k=0$:

$\frac{1}{2} \cdot \gamma_0(t)$



$\gamma_0(0) = (0,0) = p_0$

$\gamma_0(\frac{1}{3}) = (0,1) = p_1$

$\gamma_0(\frac{2}{3}) = (1,0) = p_2$

$\gamma_0(1) = (1,1) = p_3$

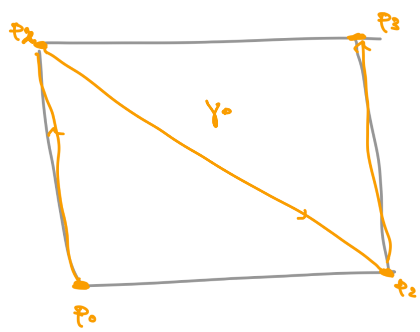
Dabei

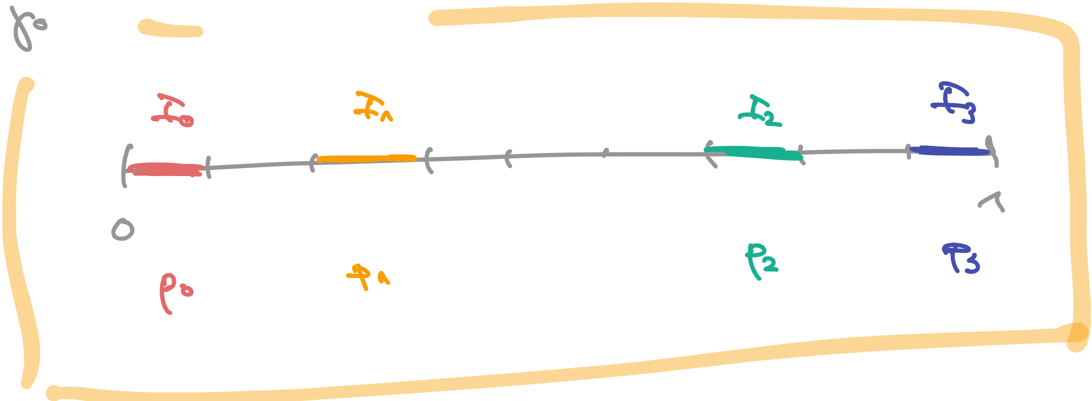
p_0 für $0 \leq t \leq \frac{1}{9}$

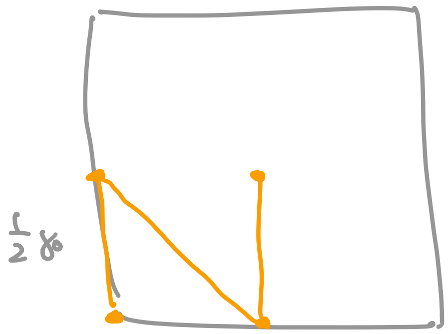
p_1 für $\frac{2}{9} \leq t \leq \frac{3}{9}$

p_2 für $\frac{6}{9} \leq t \leq \frac{7}{9}$

p_3 für $\frac{8}{9} \leq t \leq \frac{9}{9}$.

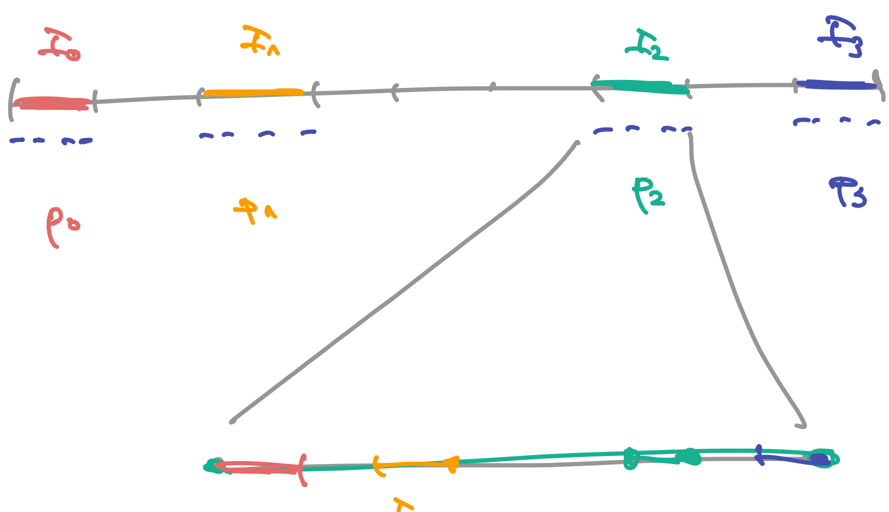






I_n $\gamma_0(g^k t)$ iff ~~....~~ :

$$\boxed{\gamma_0(g^k t) \equiv p_i \quad \text{iff} \quad g^k t \bmod 2 \in I_i, \quad i = 0, 1, 2, 3}$$



$t \in I_{i_0 \dots i_n}$: $\gamma_0(g^j t) = p_{i_j}$,

$j = 1, 2.$

$$\gamma_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{kn}} \cdot \gamma_0(g^k t)$$

auf die Teilintervall : $I_{i_0 i_1 \dots i_n}$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{kn}} \cdot p_{i_k}}$$

Das sind die Punkte in $[0,1]^2$

mit den Koordinaten

$$\left(\frac{m_1}{2^{kn}} , \frac{m_2}{2^{kn}} \right), \quad 0 \le m_1, m_2 < 2^{kn}$$