Ergänzungen

- **Spur als Graph**

Der Graph einer C^r-Funktion ist eine C^r-Kurve. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, zum Beispiel wenn die Kurve eine Spitze aufweist wie im Fall der Neilschen Parabel ??. Für reguläre ebene Kurven gilt jedoch eine *lokale* Umkehrung. Diese Tatsache werden wir später als *Satz über implizite Funktionen* auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

Satz *Sei $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^r-Kurve. Dann existiert um jeden Punkt in I ein Intervall $J \subset I$, so dass die Spur von $\gamma|_J$ als Graph einer C^r-Funktion dargestellt werden kann.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\gamma = (x, y)$ die Koordinatendarstellung der Kurve und $c \in I$ beliebig. Wegen der Regularität von γ ist

$$\dot\gamma(c) = (\dot x(c), \dot y(c)) \neq 0.$$

Angenommen, es ist $\dot x(c) \neq 0$. Aus Stetigkeitsgründen hat dann $\dot x$ auf einem hinreichend kleinen abgeschlossenen Intervall $I_c \subset I$ um c festes Vorzeichen. Somit ist die Koordinate x dort eine streng monotone Funktion von t, und

$$x\colon\ I_c \to [a,b], \quad t \mapsto x(t)$$

definiert eine Parametertransformation auf ein gewisses Intervall $[a,b]$. Für ihre Umkehrabbildung $\varphi\colon\ [a,b] \to I_c$ gilt dann $x \circ \varphi = id$. Also ist auch

$$\tilde\gamma = \gamma \circ \varphi\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde\gamma(t) = (t, y \circ \varphi(t)).$$

Das bedeutet aber, dass die Spur von γ lokal um c der Graph der Funktion $f = y \circ \varphi$ auf $[a,b]$ ist. Ist γ von der Klasse C^r, so sind es auch y und φ und damit auch f.

Ist dagegen $\dot x(c) = 0$, so muss $\dot y(c) \neq 0$ gelten. Wir müssen dann nur die Rollen von x und y vertauschen, und erhalten lokal die Spur von γ als Graphen einer Funktion auf der y-Achse. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Entsprechendes gilt für Kurven im $\mathbb{R}^m$ mit $m \geqslant 2$. ⊸

Stückweise glatte Kurven und Wege

Viele Kurven sind glatt mit Ausnahme endlich vieler Ecken. Dies ist in den meisten Fällen jedoch unerheblich.

Definition *Sei $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Eine Kurve $\gamma \in C(I, E)$ heißt stückweise C^r, wenn es eine Teilung $T = (t_0 .., t_n)$ von I in Intervalle $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ gibt, so dass*

$$\gamma|_{I_k} \in C^r(I_k, E), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Die Klasse dieser Kurven wird mit $D^r(I, E)$ bezeichnet. ⋊

Eine D^1-Kurve besitzt in den inneren Teilungspunkten $t_1, .., t_{n-1}$ links- und rechtsseitige Ableitungen, also Geschwindigkeitsvektoren

$$\dot\gamma_-(t_k) = \lim_{t \nearrow t_k} \dot\gamma(t), \qquad \dot\gamma_+(t_k) = \lim_{t \searrow t_k} \dot\gamma(t).$$

Im Allgemeinen stimmen diese nicht überein, und die Kurve bildet eine Ecke oder Spitze – sonst wäre der Teilungspunkt auch nicht nötig. Außerdem existieren die einseitigen Ableitungen an den Intervallenden von I.

▹ *Beispiele* A. Jede C^r-Kurve ist auch eine D^r-Kurve.

B. Die Neilsche Parabel ?? ist D^∞.

C. Der Rand jedes Polygons besitzt eine D^∞-Parametrisierung.

D. Die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} |t| \sin(1/t), & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

ist stetig, ihr Graph also eine Kurve. Diese ist aber nicht D^1 A-??. ◃

Eine stückweise C^1-Kurve ist lipschitzstetig und damit rektifizierbar. Auch die Längenformel gilt unverändert.

Satz *Jede D^1-Kurve $\gamma\colon I \to E$ ist rektifizierbar, und es gilt*

$$L_I(\gamma) = \int_I \|\dot\gamma(t)\|_E \,\mathrm{d}t. \qquad ⋊$$

⟪⟪ Ist $T = (t_0, .., t_n)$ eine passende Teilung von I und $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ ein Teilungsintervall, so ist aufgrund der Additivität der Längenfunktion ?? und der Längenformel ??

$$L_I(\gamma) = \sum_{k=1}^n L_{I_k}(\gamma) = \sum_{k=1}^n \int_{I_k} \|\dot\gamma(t)\|_E \,\mathrm{d}t = \int_I \|\dot\gamma(t)\|_E \,\mathrm{d}t. \qquad ⟫⟫$$

Eine D^r-Kurve γ heißt *stückweise regulär*, wenn alle ihre C^r-Abschnitte regulär sind. Entsprechend heißt ein Weg ω *stückweise C^r* respektive *stückweise regulär*, wenn er wenigstens eine Parametrisierung γ mit entsprechenden Eigenschaften besitzt. Ein stückweise regulärer Weg besitzt eine stückweise reguläre Parametrisierung nach der Bogenlänge, $\eta\colon [0,l] \to E$, so dass $\|\dot\gamma(t)\|_E = 1$ mit Ausnahme endlich vieler Punkte.

1 Für die Kurve

$$\gamma:\ [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{cases} (t, t^2\cos(\pi/t^2)), & t > 0, \\ (0,0), & t = 0, \end{cases}$$

zeige man:

a. γ ist injektiv und differenzierbar.

b. γ ist nicht rektifizierbar.

▹ *Lösung* *a.* Die Injektivität von γ folgt aus der Injektivität der ersten Komponentenfunktion. Die Differenzierbarkeit in Punkten $t \neq 0$ ergibt sich aus den Differenzierbarkeitssätzen. Bei $t = 0$ betrachten wir den Differenzenquotienten für die zweite Komponente γ_2. Hier erhalten wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{\gamma_2(0+h) - \gamma_2(0)}{h} = \lim_{h\to 0} = h\cos(\pi/h^2) = 0,$$

denn der Cosinus ist gleichmäßig beschränkt. Also ist γ bei $t = 0$ differenzierbar, und

$$\dot{\gamma}(0) = (0,0).$$

b. Für $n \geqslant 1$ betrachten wir die Zerlegung T_n von $[0,1]$ mit den Punkten

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n-1}} < .. < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Es ist also

$$t_k = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad t_{n+1} = 0,$$

wenn wir der Einfachheit halber einmal von rechts nach links nummerieren. Dann ist

$$\gamma(t_k) = (t_k, \frac{1}{k}\cos(k\pi)) = (t_k, \frac{(-1)^k}{k}).$$

Somit ist

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})\| \geqslant \frac{1}{k}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

und es folgt

$$\Sigma_{T_n}(\gamma) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty, \qquad n \to \infty. \quad ◃$$

2 *Peanokurve* Sei $u\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine stetige Funktion mit

$$u(t+2) = u(t), \qquad u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1/3, \\ 1, & 2/3 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Definiere

$$\gamma(t) = \sum_{k \geqslant 0} 2^{-k-1} \gamma_0(9^k t), \qquad \gamma_0(t) = (u(t), u(3t)).$$

Dann bildet γ das Intervall $[0,1]$ surjektiv auf $[0,1]^2$ ab.

▹ *Lösung* Sei

$$I_0 = [\tfrac{0}{9}, \tfrac{1}{9}], \quad I_1 = [\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}], \quad I_2 = [\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}], \quad I_3 = [\tfrac{8}{9}, \tfrac{9}{9}],$$
$$p_0 = (0,0), \quad p_1 = (0,1), \quad p_2 = (1,0), \quad p_3 = (1,1).$$

Für die Kurve γ_0 gilt dann aufgrund der Definition von u

$$\gamma_0(t) \equiv p_i \quad \text{für} \quad t \in I_i, \qquad i = 0,1,2,3.$$

Dementsprechend gilt für alle $k \geqslant 0$

$$\gamma_0(9^k t) \equiv p_i \quad \text{für} \quad 9^k t \bmod 2 \in I_i.$$

Definieren wir nun Intervalle $I_{i_0 i_1 \dots i_n} \subset [0,1]$ mit beliebigen $i_\kappa \in \{0,1,2,3\}$ durch

$$t \in I_{i_0 i_1 \dots i_n} \quad \Leftrightarrow \quad 9^k t \bmod 2 \in I_{i_k} \ \text{ für } \ k = 0, \dots, n,$$

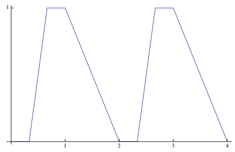
so sind diese Intervalle nicht leer, und es gilt

$$\gamma_n(t) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} 2^{-k-1} \gamma_k(t) \equiv \sum_{k=0}^{n} 2^{-k-1} p_{i_k} \quad \text{für} \quad t \in I_{i_0 i_1 \dots i_n}.$$

Da alle Kombinationen der Indizes i_κ möglich sind, trifft die Kurve γ_n somit alle Punkte auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2/2^{n+1}$ innerhalb von $[0,1)^2$. Die Kurve γ_n ist deshalb 2^{-n-1}-dicht in $[0,1]^2$, gemessen in der Maximumsnorm. Als gleichmäßiger Limes der γ_n ist γ damit dicht in $[0,1]^2$ und deshalb eine Peanokurve. ◃

Abb 3

Eine Wahl der Funktion u



Wählen wir u zum Beispiel wie in Abbildung 3, so sehen die ersten Kurven wie folgt aus: