VÜ-5 10. 6. 2021

4:07

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$$

nun allgemein. Def. von A^T,

„adjungierte Operator"

• „Satz": Gegeben $A : U \to U$,

U Teilraum. Dann ex. A^T:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle .$$

Spezialfall: $\mathbb{R}^n$, A $n\times n$ Matrix

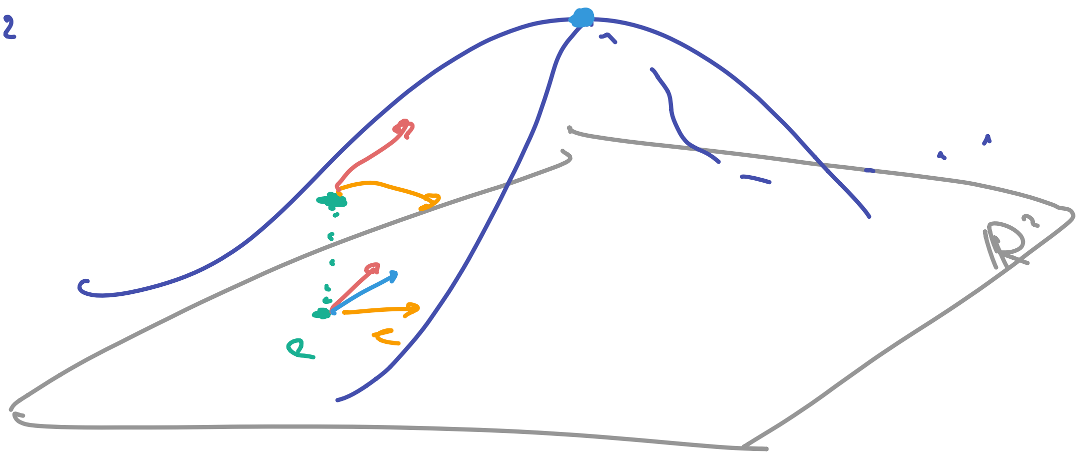
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Standard-SP

Dann ist A^T transponierte M.

Richtung $\to$ steilster Anstieg :

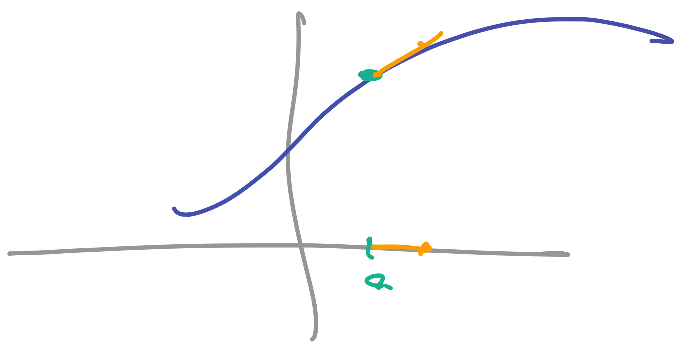
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$n=2$



$f_e(t) := f(a+te)$:

$f_e'(0)$ Anstiegsrate



e : $\|e\| = 1$, d.h.

$e \in S^n = \{ \|x\| = 1 \} \subset \mathbb{R}^n$

$f_e(t) := f(a+te)$:

$$\frac{d}{dt} f_e(t) = Df(a+te)\cdot(a+te)'$$

$$= Df(a+te)\cdot e$$

$$= Df(a)\cdot e \quad \text{für } t=0.$$

1 Betrachte, für $\alpha \neq 0$ und $b > 0$, die Kurve

$$\gamma : [0,b] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = e^{\alpha t}(\cos(t), \sin(t)).$$

a. Zeigen sie, dass γ rektifizerbar ist.
b. Berechen sie die Bogenlänge $L_{[0,b]}\gamma$.
c. Für welche α existiert $\lim_{b\to\infty} L_{[0,b]}\gamma$?

a. Klar, da γ C^1.

b.
$$\dot\gamma = \underbrace{\alpha e^{\alpha t}}(\underbrace{\cos t, \sin t}) + \underbrace{e^{\alpha t}}(\underbrace{-\sin t, \cos t})$$

$$\|\dot\gamma\|^2 = \|\dot\gamma_I\|^2 + \|\dot\gamma_{II}\|^2$$

Pyth.

$$= \alpha^2 e^{2\alpha t} + e^{2\alpha t}$$

$$= (\alpha^2+1)\, e^{2\alpha t}$$

$$\|\dot\gamma\| = \sqrt{\alpha^2+1} \cdot e^{\alpha t}$$

$$L_{[0,b]}\gamma = \int_0^b \|\dot\gamma\|$$

$$= \sqrt{\alpha^2+1} \int_0^b e^{\alpha t}$$

$$= \begin{cases} b, & \alpha = 0 \\ \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}\left(e^{\alpha b} - 1\right), & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

c. $\lim_{b\to\infty} \ldots$ ex. gdw $\alpha < 0$. ☒

2 Man zeige, dass die Abbildungen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 1+x \\ x^2 \end{pmatrix},$$

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 + y^2$$

total differenzierbar sind.

$$f(a+h) = \begin{pmatrix} 1+a+h \\ (a+h)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+a \\ a^2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

"in h sortieren"

$$= f(a) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix} \cdot h + o(h)$$

Also:

$$Df(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$Df(a)\,h = \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix} \cdot h.$$

$$f(h) = o(h) \qquad \text{"bei } h \to 0\text{"}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{f(h)}{h}\right| \longrightarrow 0, \quad h \to 0$$

$$f(h) = O(h) \qquad \text{bei } h \in U(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad |f(h)| \le K \cdot |h|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{f(h)}{h}\right| \le K$$

$$f(a+h) = \begin{pmatrix} 1+a+h \\ (a+h)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+a+h \\ a^2+2ah+h^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+a) + h \\ a^2 + 2a\cdot h + h^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+a \\ a^2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2$$

$$g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$g(a+h) = (a_1+h_1)^2 + (a_2+h_2)^2$$

$$= a_1^2 + 2a_1h_1 + h_1^2 + a_2^2 + 2a_2h_2 + h_2^2$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1h_1 + 2a_2h_2 + h_1^2 + h_2^2$$

$$= g(a) + 2\,a^T h + O(|h|^2)$$

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

Also:

$$Dg(a)\,h = 2a^T h$$

$$Dg(a) = 2a^T$$

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$Dg = \boxed{}$ 1×2-Matrix

Bsp.: (i) $f(x) = O(x^2)$

$\Rightarrow f(x) = o(x)$

Weil:

(i): $|f(x)| \leq K \cdot |x|^2$

Also: $\dfrac{|f(x)|}{|x|} \leq K \cdot |x| \longrightarrow 0$

für $x \to 0$.

Achtung: $O(x^2) \neq o(x)$!

Sondern:

$O(x^2) \Longrightarrow o(x)$.

3 Die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \triangleq (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

ist in $(0,0)$ differenzierbar, aber nicht partiell stetig differenzierbar.

Schreibe $z = (x,y)$. Dann

$$f(z) = f(x,y) = |z|^2 \sin\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

$$|z| = |z|_2$$

a) $$|f(z)| = O(|z|^2)$$

$\Rightarrow$ f ist in 0 total diffbar,

$$Df(0) = \underset{=}{0}.$$

Dann: $$\frac{|f(z) - \cancel{f(0)}^{\,0} - 0\cdot z|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{k\cdot |z|^{\cancel{2}}}{\cancel{|z|}} \to 0$$

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - Lh|}{|h|} \longrightarrow 0$$

$a = 0,\quad h = z,\quad f(a) = 0,\quad L = 0$

$$|z|^2 = x^2+y^2$$

$$f(z) = f(x,y) = \underbrace{|z|^2}\ \underbrace{\sin\left(\frac{1}{|z|^2}\right)}$$

Dim.

$$f_x = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{|z|^2}\right) + \cancel{|z|^2} \cos\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \frac{-2}{|z|^{\cancel{3}}} \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}|z|}$$

$$= 2x \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{|z|^2}\right)}_{=0} - \frac{2x}{|z|^2} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{|z|^2}\right)}_{=1} .$$

Voglio dire: f_x [illegible] punti di [illegible]

Idea: scegliere z_h :

$$\underbrace{|z_h|^2} = \frac{1}{2\pi h} , \quad h \to \infty$$

Allora:

$$f_x(z_h) = -2 x_h \, 2\pi \underline{h} \longrightarrow -\infty , \quad h \to \infty .$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$x_h = y_h = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}$$

4 Man bestimme die Jacobimatrizen der Abbildungen

$$f:\ (0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=(xy,\sqrt{x}/y)^\top = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$g:\ \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\qquad g(x,y)=\log(x^2+y^2)$$

sowie

$$h=g\circ f.$$

$$Jf = \begin{pmatrix} \partial_x \underbrace{f_1}_{xy} & \partial_y \underbrace{f_1}_{\frac{\sqrt{x}}{y}} \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2y\sqrt{x}} & -\frac{\sqrt{x}}{y^2} \end{pmatrix}.$$

$$Jg = (\partial_x g,\ \partial_y g) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{2y}{x^2+y^2}\right).$$

Jetzt $h = g\circ f$:

$$Jh = J(g\circ f) = (Jg)\circ f\cdot Jf$$

$$= \left(\frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{2y}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{(xy,\ \sqrt{x}/y)}\cdot Jf$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}(2x,\ 2y)\Bigg|_{(xy,\ \frac{\sqrt{x}}{y})}\cdot Jf$$

$$= \frac{1}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}} \left(2xy, \; 2\frac{\sqrt{x}}{y} \right) \cdot \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2y\sqrt{x}} & -\frac{\sqrt{x}}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}} \left(2xy^2 + \frac{1}{y^2}, \; 2x^2y - 2\frac{x}{y^2} \right)$$

$$= \left(\frac{2xy^4 + 1}{x^2y^4 + x}, \; \frac{2xy^4 - 2}{xy^5 + y} \right)$$

$x, y > 0.$

5 Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Gilt

$$f(tx) = t^\lambda f(x), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

so folgt

$$Df(x)\,x = \lambda f(x).$$

Hiervon gilt auch die Umkehrung. *Hinweis:* Fixiere x und bestimme eine DGl für

$$\varphi(t) = t^\lambda f(x) - f(tx).$$

$$Df(x)\,x = \frac{d}{dt} f(tx)\Big|_{t=1} = Df(tx)\Big|_{t=1} (tx)' = Df(x)\cdot x$$

$$= \frac{d}{dt}\, t^\lambda f(x)\Big|_{t=1}$$

$$= \lambda t^{\lambda-1} f(x)\Big|_{t=1}$$

$$= \lambda f(x).$$

Umgekehrt: Betrachte:

$\varphi(1) = 0$

$$\boxed{\varphi(t) = t^\lambda f(x) - f(tx)}, \quad t > 0.$$

Für φ gilt:

$$\varphi'(t) = \lambda t^{\lambda-1} f(x) - \frac{1}{t}\underbrace{Df(tx)(tx)}_{\lambda f(tx)}$$

$$= \frac{\lambda}{t}\left(t^\lambda f(x) - f(tx)\right)$$

$$= \frac{\lambda}{t}\,\varphi(t)$$

Also: $\boxed{\varphi'(t) = \frac{\lambda}{t} \cdot \varphi(t)}$

Separiere Dgl!

1. $\varphi \equiv 0$ ist Lösung.

2. $\varphi \not\equiv 0 \overset{(\text{Ü})}{\Longrightarrow} \varphi(t) = \alpha t^{\lambda}, \ \alpha > 0$

Aufgabe: $\varphi(x) \geq 0$.

Also: $\varphi \equiv 0$

$\Longleftrightarrow \quad f(tx) = t^{\lambda} f(x).$