1 Betrachte, für $\alpha \neq 0$ und $b > 0$, die Kurve

$$\gamma : [0, b] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos t, \sin t).$$

*a.* Zeigen sie, dass $\gamma$ rektifizierbar ist.
*b.* Berechen sie die Bogenlänge $L_{[0,b]}\gamma$.
*c.* Für welche $\alpha$ existiert $\lim_{b\to\infty} L_{[0,b]}\gamma$?

▹ *Lösung* *a.* $\gamma$ ist stetig differenzierbar und damit auch rektifizierbar.
*b.* Es ist

$$\dot{\gamma}(t) = \alpha \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos t, \sin t) + \mathrm{e}^{\alpha t}(-\sin t, \cos t).$$

Da die beiden Summanden senkrecht aufeinander stehen, erhalten wir mit Pythagoras

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = \alpha^2 \mathrm{e}^{2\alpha t} + \mathrm{e}^{2\alpha t} = (\alpha^2 + 1)\mathrm{e}^{2\alpha t}$$

und damit

$$\begin{aligned} L_{[0,b]}\gamma &= \int_0^b \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{\alpha^2 + 1} \int_0^b \mathrm{e}^{\alpha t} \,\mathrm{d}t = \begin{cases} \sqrt{1 + 1/\alpha^2}(\mathrm{e}^{\alpha b} - 1), & \alpha \neq 0, \\ b, & \alpha = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

*c.* Der Limes fur $b \to \infty$ existiert damit genau dann, wenn $\alpha < 0$. ◃

2 Man zeige, dass die Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 1 + x \\ x^2 \end{pmatrix}, \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 + y^2$$

total differenzierbar sind.

▹ *Lösung* Für $f$ gilt

$$\begin{aligned} f(a + h) = \begin{pmatrix} 1 + a + h \\ (a + h)^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + a \\ a^2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= f(a) + a \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix} + o(h). \end{aligned}$$

Somit ist

$$Df(a)h = h \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix}, \qquad Df(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix}.$$

Für $g$ gilt, mit $a = (a_1, a_2)^\top$ und $h = (h_1, h_2)^\top$,

$$\begin{aligned} g(a + h) &= (a_1 + h_1)^2 + (a_2 + h_2)^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 h_1 + 2a_2 h_2 + h_1^2 + h_2^2 \\ &= g(a) + 2(a_1 h_1 + a_2 h_2) + o(h). \end{aligned}$$

Somit ist

$$Dg(a)h = 2(a_1 h_1 + a_2 h_2) = 2a^\top h$$

und

$$Dg(a) = 2a^\top . \quad ◂$$

3 Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \mathrel{\hat=} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

ist in $(0,0)$ differenzierbar, aber nicht partiell stetig differenzierbar.

▹ *Lösung* Schreibe $z = (x,y)$. Dann ist $|z|^2 = x^2 + y^2$ und

$$f(z) = f(z,y) = |z|^2 \sin |z|^{-2} = O(|z|^2).$$

Daraus folgt sofort, dass $f$ bei $z = 0$ differenzierbar ist, mit $Df(0) = 0$. Insbesondere existieren damit auch die partiellen Ableitungen bei Null und sind Null.

Für die partielle Ableitung nach $x$ außerhalb des Nullpunkts erhält man

$$\begin{aligned} f_x &= 2x \sin |z|^{-2} + |z|^2 \cos |z|^{-2} \cdot \frac{-2}{|z|^3} \frac{x}{|z|} \\ &= 2x \sin |z|^{-2} - \frac{2x}{|z|^2} \cos |z|^{-2} . \end{aligned}$$

Wähle nun eine Folge von Punkten $z_k$ mit

$$|z_k|^2 = \frac{1}{2\pi k},$$

zum Beispiel mit $x_k = y_k = -1/\sqrt{4\pi k}$. Für diese Folge verschwindet der Sinus-Term, der Cosinus-Term ist Eins, und wir erhalten

$$f_x(z_k) = -\frac{2x_k}{|z_k|^2} = \sqrt{4\pi k} \to \infty, \qquad k \to \infty.$$

Also ist $f_x$ im Nullpunkt nicht stetig. ◂

4 Man bestimme die Jacobimatrizen der Abbildungen

$$f:\ (0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=(xy,\sqrt{x}/y)^\top$$
$$g:\ \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\quad g(x,y)=\log(x^2+y^2)$$

sowie

$$h=g\circ f.$$

▹ *Lösung* Für $Jf$ erhalten wir die $2\times 2$-Matrix

$$Jf=\begin{pmatrix}\partial_x(xy) & \partial_y(xy)\\ \partial_x(\sqrt{x}/y) & \partial_y(\sqrt{x}/y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & x\\ \dfrac{1}{2y\sqrt{x}} & -\dfrac{\sqrt{x}}{y^2}\end{pmatrix}$$

und für $Jg$ die $1\times 2$-Matrix

$$Jg=\begin{pmatrix}\partial_x g & \partial_y g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2x}{x^2+y^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2}\end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$Jh=J(g\circ f)=(Jg\circ f)(Jf).$$

Für $Jg\circ f$ erhalten wir

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\dfrac{2x}{x^2+y^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2}\end{pmatrix}\Bigg|_{(xy,\sqrt{x}/y)}\\ &\quad=\frac{1}{x^2y^2+x/y^2}\begin{pmatrix}2xy & 2\sqrt{x}/y\end{pmatrix}=\frac{1}{x^2y^4+x}\begin{pmatrix}2xy^3 & 2y\sqrt{x}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Also wird

$$\begin{aligned}Jh&=\frac{1}{x^2y^4+x}\begin{pmatrix}2xy^3 & 2y\sqrt{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x\\ \dfrac{1}{2y\sqrt{x}} & -\dfrac{\sqrt{x}}{y^2}\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{x^2y^4+x}\begin{pmatrix}2xy^4+1 & 2x^2y^3-2x/y\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\dfrac{2xy^4+1}{x^2y^4+x} & \dfrac{2xy^4-2}{xy^5+y}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$ ◃

5 Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Gilt

$$f(tx) = t^\lambda f(x), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

so folgt

$$Df(x)\,x = \lambda f(x).$$

Hiervon gilt auch die Umkehrung. *Hinweis:* Fixiere $x$ und bestimme eine DGl für

$$\varphi(t) = t^\lambda f(x) - f(tx). \tag{†}$$

▷ *Lösung* *a.* Es ist

$$Df(x)x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx)\Big|_{t=1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t^\lambda f(x)\Big|_{t=1} = \lambda t^{\lambda-1} f(x)\Big|_{t=1} = \lambda f(x).$$

*b.* Für die Funktion $\varphi$ und $t > 0$ gilt mit (†)

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \lambda t^{\lambda-1} f(x) - Df(tx)x \\ &= \lambda t^{\lambda-1} f(x) - t^{-1} Df(tx)(tx) = \frac{\lambda}{t}(t^\lambda f(x) - f(tx)) = \frac{\lambda}{t}\varphi(t).\end{aligned}$$

Für $t > 0$ gilt also

$$\varphi'(t) = \frac{\lambda}{t}\varphi(t), \qquad \varphi(1) = 0.$$

Die eindeutige Lösung dieses separierbaren Anfangswertproblems ist $\varphi \equiv 0$, und das ergibt

$$f(tx) = t^\lambda f(x).$$ ◁