1 Bestimmen sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$$

und geben sie in den Extremstellen p das Taylorpolynom $T_p^2 f$ an.

2 Gegeben sind m Punkte $a_1, .., a_m$ im $\mathbb{R}^n$. Finden sie den Punkt c im $\mathbb{R}^n$, wo die Summe aller ihrer quadrierten Abstände zum Punkt c minimal wird.

3 Finden sie den Quader, der bei gegebener Kantenlänge das größte Volumen aufweist.

1 Bestimmen sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$$

und geben sie in den Extremstellen p das Taylorpolynom $T_p^2 f$ an.

▹ *Lösung* Betrachte den Gradienten

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 \\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2y^2(3-4x-3y) \\ x^3y(2-2x-3y) \end{pmatrix}.$$

Nullstellen liegen vor, wenn $x=0$, oder $y=0$, oder

$$3-4x-3y=0 \quad \wedge \quad 2-2x-3y=0,$$

was den Punkt $p=(x,y)=(1/2,1/3)$ ergibt. Außer der x- und der y-Achse ist dies also die einzige nichttriviale Lösung.

Die Hessische ist

$$Hf = \begin{pmatrix} 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 & 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{pmatrix}.$$

Eine kurze Rechnung ergibt

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} 1/3 - 1/3 - 1/9 & 1/2 - 1/3 - 1/4 \\ 1/2 - 1/3 - 1/4 & 1/4 - 1/8 - 1/4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{72}\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} < 0.$$

Also liegt bei p ein striktes lokales Maximum.

Da der Gradient bei p verschwindet, erhalten wir bei p das quadratische Taylorpolynom

$$\begin{aligned} T_p^2 f(h) &= f(p) + \frac{1}{2}\langle Hf(p)h, h\rangle \\ &= \frac{1}{6\cdot 8\cdot 9} + \frac{1}{144}\langle Ah, h\rangle \\ &= \frac{1}{432}(1 + 3\langle Ah, h\rangle) \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Bleiben noch die kritischen Punkte auf der x- und y-Geraden zu diskutieren. Da f dort auch verschwindet, genügt es, das Vorzeichen von f zu betrachten.

Betrachte zuerst die y-Gerade, also Punkte $(0,y)$. Lokal ist dort

$$f(x,y) = y^2(1-y)\cdot x^3 + O(x^4).$$

Ist $y^2(1-y) \neq 0$, so wechselt f das Vorzeichen, wenn m das Vorzeichen wechselt. Aber auch bei $y=0$ und $y=1$ wechselt f das Vorzeichen, wenn man zum Beispiel die Punkte $y=x$ respektive $y=1+x$ betrachtet. Somit ist kein Punkt auf der y-Geraden eine Extremalstelle.

Nun noch die x-Gerade. Hier ist

$$f(x,y) = x^3(1-x)\cdot y^2 + O(y^3).$$

Ist $x^3(1-x) \neq 0$, so wechselt f das Vorzeichen nicht, wenn y das Vorzeichen wechselt, und wir erhalten ein lokales, nicht striktes Extremum, und zwar ein Minimum für

$$x^3(1-x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1,$$

und ein Maximum für

$$x^3(1-x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \vee x > 1.$$

Den Punkt $(0,0)$ haben wir bereits als Extremalstelle ausgeschlossen. Ebenso schließt man noch $(1,0)$ aus, indem man $y = 1-x$ betrachtet.

Insgesamt erhalten wir also

(i) ein striktes lokales Maximum bei $(1/2, 1/3)$,
(ii) nicht-strikte lokale Minima bei $(x,0)$ mit $0 < x < 1$,
(iii) nicht strikte lokale Maxima bei $(x,0)$ mit $x < 0$ oder $x > 1$. ◂

2 Gegeben sind m Punkte $a_1, .., a_m$ im $\mathbb{R}^n$. Finden sie den Punkt c im $\mathbb{R}^n$, wo die Summe aller ihrer quadrierten Abstände zum Punkt c minimal wird.

▹ *Lösung* Gesucht ist das Minimum der Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^m \|x-a_i\|^2,$$

wobei die Division durch m nur die folgenden Formeln vereinfacht und sonst keine Bedeutung hat. Das Quadrat der euklidischen Norm ist differenzierbar, mit

$$\nabla(\|x-a_i\|^2) = 2(x-a_i).$$

Also ist

$$\nabla f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m (x-a_i) = x - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m a_i.$$

Dieser Gradient besitzt einen einzigen kritischen Punkt in

$$c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m a_i,$$

dem arithmetischen Mittel der Punkte $a_1, .., a_m$, beziehungsweise dem Schwerpunkt des Körpers mit gleichen Massen in den Punkten $a_1, .., a_m$. Aus der Geometrie des Problems ist klar, dass dies ein lokales und sogar globales *Minimum* ist. Die Hessische von f ist übrigens $Hf = E > 0$. ◂

3 Finden sie den Quader, der bei gegebener Kantenlänge das größte Volumen aufweist.

▹ *Lösung* Sind x, y, z die Kantenlängen des Quaders, so ist also die Funktion

$$V = xyz$$

zu maximieren unter der Vorgabe, dass $x + y + z$ konstant ist. Aufgrund der Homogenität des Problems in allen drei Koordinaten können wir die Gesamtkantenlänge auf einen beliebigen positiven Wert fixieren, zum Beispiel auf $x + y + z = 3$. Dann ist $z = 3 - x - y$ und

$$V = V(x, y) = xy(3 - x - y) = 3xy - x^2y - xy^2.$$

Für den Gradienten erhalten wir damit

$$\nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} 3y - 2xy - y^2 \\ 3x - 2xy - x^2 \end{pmatrix}.$$

Dieser Gradient besitzt vier verschiedene Nullstellen, aber nur der kritische Punkt mit $x = y = 1$ und damit auch $z = 1$ hat positive Koordinaten. Auch hier ist aufgrund geometrischer Überlegungen klar, dass es sich um das globale Maximum der Volumenfunktion auf dem ersten Quadranten in $\mathbb{R}^3$ handeln muss. Das Maximum wird also von einem Quader mit drei gleichen Seiten erreicht, was auch nicht weiter überrascht.

Die Hessische ist übrigens

$$HV(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & 3 - 2x - 2y \\ 3 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$HV(x, y)\Big|_{x=y=1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} < 0.$$

Ein allgemeines Verfahren für solche Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen werden wir übrigens später kennenlernen. ◃