1 Sei $A \subset V$ nicht leer. Ist A konvex, so gilt

$$(s+t)A = sA + tA, \qquad s, t \geqslant 0.$$

Für nicht-konvexes A gilt dies im Allgemeinen nicht.

2 Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Man beweise oder widerlege:
a. $f+g$ ist konvex. *b.* fg ist konvex. *c.* $f \circ g$ ist konvex.

3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Ist

$$f = (f_1, .., f_m)^\top : \ \Omega \to \mathbb{R}^m$$

eine Abbildung mit konvexen Komponente $f_1, .., f_m$ und

$$g : \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

konvex und komponentenweise monoton wachsend, so ist auch

$$h = g \circ f : \ \Omega \to \mathbb{R}$$

konvex.

4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Ist

$$f : \ \Omega \to (0, \infty)$$

anti-konvex, so ist $-1/f$ auf Ω konvex.

5 Für $x_1, .., x_n > 0$ und $\alpha_1, .., \alpha_n \geqslant 0$ mit $\alpha_1 + .. + \alpha_n = 1$ gilt

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

1 Sei $A \subset V$ nicht leer. Ist A konvex, so gilt

$$(s+t)A = sA + tA, \qquad s,t \geqslant 0.$$

Für nicht-konvexes A gilt dies im Allgemeinen nicht.

▹ *Lösung* Es gilt $(s+t)A \subset sA + tA$, denn

$$\begin{aligned} & x \in (s+t)A \\ \Rightarrow\ & x = (s+t)a \qquad \text{für ein } a \in A \\ \Rightarrow\ & x = sa + ta \\ \Rightarrow\ & x \in sA + tA. \end{aligned}$$

Und es gilt $(s+t)A \supset sA + tA$, denn

$$\begin{aligned} & x \in sA + tA \\ \Rightarrow\ & x = sa + tb \qquad \text{für zwei } a,b \in A \\ \Rightarrow\ & x = (s+t)\left\{\frac{s}{s+t}a + \frac{t}{s+t}b\right\}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in geschweiften Klammern ist eine Konvexkombination aus a und b, also ein Element $c \in A$. Somit ist

$$x = (s+t)c \in (s+t)A.$$

Für nicht-konvexes A gilt dies im Allgemeinen nicht. Betrachte dazu $A = \{0,1\} \subset \mathbb{R}$. Es ist

$$(1+1)A = 2A = \{0,2\},$$

aber

$$1A + 1A = A + A = \{0,1,2\}.$$ ◃

2 Seien $f,g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Man beweise oder widerlege:
a. $f+g$ ist konvex. *b.* fg ist konvex. *c.* $f \circ g$ ist konvex.

▹ *Lösung* *a.* Das ist richtig. Für $h = f + g$ gilt

$$\begin{aligned} & h((1-t)u + tv) \\ &\quad = f((1-t)u + tv) + g((1-t)u + tv) \\ &\quad \leqslant (1-t)f(u) + tf(v) \ + \ (1-t)g(u) + tg(v) \\ &\quad = (1-t)(f(u) + g(u)) \ + \ t(f(v) + g(v)) \\ &\quad = (1-t)h(u) + th(v). \end{aligned}$$

b. Gilt im Allgemeinen nicht:

$$f(x) = x, \qquad g(x) = -x$$

sind beide linear und damit konvex, aber

$$(fg)(x) = -x^2$$

ist sktrikt anti-konvex.
c. Gilt im Allgemeinen ebenfalls nicht:

$$f(x) = -x, \qquad g(x) = x^2$$

sind beide konvex, aber

$$(f \circ g)(x) = -x^2$$

ist wiederum strikt anti-konvex. ◂

3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Ist

$$f = (f_1, .., f_m)^\top : \ \Omega \to \mathbb{R}^m$$

eine Abbildung mit konvexen Komponente $f_1, .., f_m$ und

$$g : \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

konvex und komponentenweise monoton wachsend, so ist auch

$$h = g \circ f : \ \Omega \to \mathbb{R}$$

konvex.

▹ *Lösung* Aufgrund der Konvexität jedes f_j und der Monotonie von g in jedem Argument gilt

$$\begin{aligned} h&((1-t)u + tv) \\ &= g(.., f_j((1-t)u + tv), ..) \\ &\leqslant g(.., (1-t)f_j(u) + tf_j(v), ..) \\ &= g((1-t)f(u) + tf(v)). \end{aligned}$$

Aufgrund der Konvexität von g ist dies kleiner gleich

$$(1-t)g(f(u)) + tg(f(v)) = (1-t)h(u) + th(v).$$

Also gilt insgesamt

$$h((1-t)u + tv) \leqslant (1-t)h(u) + th(v). \quad ◂$$

4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Ist

$$f: \ \Omega \to (0,\infty)$$

anti-konvex, so ist $-1/f$ auf Ω konvex.

▹ *Lösung* Dies folgt mit der vorangehenden Aufgabe. Ist f anti-konvex, so ist $-f$ konvex und bildet Ω auf $(-\infty,0)$ ab. Dort aber ist die Funktion

$$g: \ (-\infty,0) \to \mathbb{R}, \quad g(u) = -\frac{1}{u}.$$

konvex und monoton steigend. Somit ist auch

$$g \circ (-f) = \frac{1}{f}$$

konvex. ◃

5 Für $x_1,..,x_n > 0$ und $\alpha_1,..,\alpha_n \geqslant 0$ mit $\alpha_1 + .. + \alpha_n = 1$ gilt

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

▹ *Lösung* Aufgrund der Positivität aller Größen und der Monotonie des Logarithmus ist dies äquivalent mit

$$\log\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}\right) \leqslant \log\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right),$$

also

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \log(x_i) \leqslant \log\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right).$$

Dies ist aber genau die Tatsache, dass $\log$ anti-konvex ist. ◃