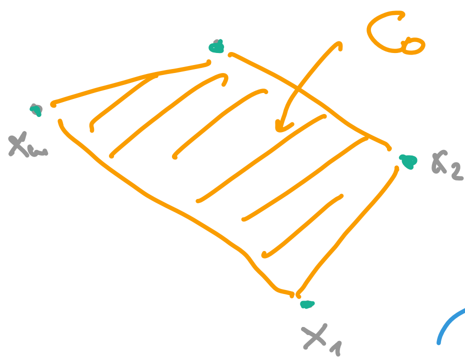
1 Sei $f: x \mapsto \langle a,x\rangle + b$ eine nicht-konstante, affine Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann nimmt f ihr Maximum über der konvexen Hülle von m Punkten $x_1,..,x_m$ in $\mathbb{R}^n$ in wenigstens einem dieser Punkte an.



Bew:

$$\boxed{x \in C_0 \iff x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,}$$

$$\sum \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Damit

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle a, \sum \lambda_i x_i \rangle + b \\ &= \sum_i \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \langle a, x_i \rangle + b \\ &\leq \sum_i \lambda_i \underbrace{\boxed{\max_{1\leq i \leq m} \langle a, x_i\rangle}}_{= \langle a, x_{i_0}\rangle} + b \\ &= \langle a, x_{i_0}\rangle + b. \end{aligned}$$

wird da angenommen!

Also:

$$\sup_{x\in C_0} f(x) = \langle a, x_{i_0}\rangle + b = f(x_{i_0}).$$

2 Ist A antisymmetrisch, also $A^\top = -A$, so ist e^A orthogonal. $B^T B = I$

Bsp:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} :$$

$$J^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -J.$$

Bew: A und A^T kommutieren: $AA^T = A^T A$;

Außerdem: $\exp(A)^T = \exp(A^T)$;

Daraus folgt:

$$\exp(A)^T \exp(A)$$

$$= \exp(A^T) \exp(A)$$

$$= \exp(A^T + A)$$

$$= \exp(0) = I$$

3 Es gilt

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \boxed{J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Hinweis: Zeigen sie zuerst, dass $J^2 = -I$, $J^3 = -J$ und $J^4 = I$.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$J^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad J^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = J^2 \cdot J = -J$$

$$J^4 = J^2 \cdot J^2 = I.$$

Also: $J^{4n+k} = J^k$

$$e^{Jt} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} J^k t^k$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 \mp \dots} & -(\underline{\qquad}) \\ \underbrace{\frac{1}{1!}t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 \mp \dots} & -\,\text{"}- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^{Jt} = \text{Drehung um Winkel } t}$$

4 Besitzt A einen Eigenwert $\lambda < 0$, so besitzt die Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ wenigstens eine nichttriviale Lösung $x(t)$ mit $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Bew.: Sei λ EW von A mit EV v,

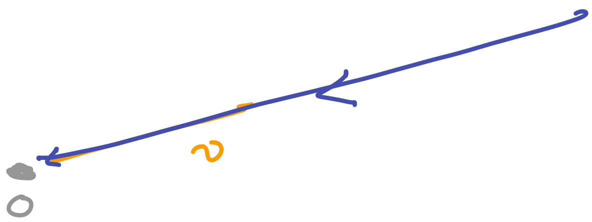
Dann ist

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} v \qquad \text{Lösg von } \dot{x} = Ax:$$

Denn:

$$\dot{\varphi}(t) = e^{\lambda t} \lambda v = e^{\lambda t} A v = A(e^{\lambda t} v) = A\varphi(t).$$

Für $\lambda < 0$: $\quad \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} v = 0.$



5 *a.* Ist λ ein Eigenwert von A, so ist e^{λ} ein Eigenwert von e^{A}.

b. Es gibt keine 2×2-Matrix L mit

$$\mathrm{e}^{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

c. Ist $\|A - I\|$ hinreichend klein, so gibt es einen Operator L mit $\mathrm{e}^{L} = A$.

d. Inwieweit ist L eindeutig bestimmt?

Beweis: a. Es gibt v : $Av = \lambda v$

Dann : $A^n v = \lambda^n v$, $n \geq 0$

$$e^{A} v = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n v = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \lambda^n \right) v = e^{\lambda} v$$

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$$

f stetig : $\boxed{\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))}$

b. Für jede Matrix C :

$$\det e^{C} = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} = e^{\lambda_1 + \lambda_2} > 0.$$

Aber $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -4 < 0$.

c. Es gilt ja:

$$\log(1-t) = -\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n} t^n, \quad |t|<1$$

$$\left(\log \frac{1}{1-t} = \sum_{n\ge 1} \frac{1}{n} t^n \right)$$

Also:

$$\boxed{\log t = -\sum \frac{1}{n}(1-t)^n, \quad 0<t<2.}$$

Für $\|A-I\|<1$:

$$L := \log A := -\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n}(I-A)^n$$

Jetzt rechnet man nach:

$$\exp(L) = A.$$

d. L nicht eindeutig:

$$\exp(L+X) = \exp(L) = A$$

für jedes X so dass

(i) mit L kommutiert

(ii) $e^X = I$

$$⨍_I f(t)\,dt = \frac{1}{|I|}\int_I f(t)\,dt$$

Ex: on [illegible] Groupe:

$$⨍_I 1\,dt = 1, \quad \text{for any } I.$$

$$e_k = e^{ikt}, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{Period } 2\pi$$

$$\langle e_h, e_k \rangle = ⨍_{-\pi}^{\pi} e_h(t)\,\overline{e_k}(t)\,dt$$

$$= ⨍_{-\pi}^{\pi} e^{iht}\, e^{-ikt}\,dt$$

$$= ⨍_{-\pi}^{\pi} e^{i(h-k)t}\,dt$$

$$= \begin{cases} 0, & h \neq k \\ ⨍_{-\pi}^{\pi} 1 = 1 & h = k. \end{cases}$$