1 Sei $f\colon x \mapsto \langle a,x\rangle + b$ eine nicht-konstante, affine Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann nimmt $f$ ihr Maximum über der konvexen Hülle von $m$ Punkten $x_1,..,x_m$ in $\mathbb{R}^n$ in wenigstens einem dieser Punkte an.

2 Ist $A$ antisymmetrisch, also $A^\top = -A$, so ist $\mathrm{e}^A$ orthogonal.

3 Es gilt

$$\mathrm{e}^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 Besitzt $A$ einen Eigenwert $\lambda < 0$, so besitzt die Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ wenigstens eine nichttriviale Lösung $x(t)$ mit $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

5 *a.* Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A$, so ist $\mathrm{e}^\lambda$ ein Eigenwert von $\mathrm{e}^A$.

*b.* Es gibt keine $2 \times 2$-Matrix $L$ mit

$$\mathrm{e}^L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

*c.* Ist $\|A - I\|$ hinreichend klein, so gibt es einen Operator $L$ mit $\mathrm{e}^L = A$.

*d.* Inwieweit ist $L$ eindeutig bestimmt?

1 Sei $f\colon x \mapsto \langle a,x\rangle + b$ eine nicht-konstante, affine Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann nimmt $f$ ihr Maximum über der konvexen Hülle von $m$ Punkten $x_1,..,x_m$ in $\mathbb{R}^n$ in wenigstens einem dieser Punkte an.

▹ *Lösung* Jeder Punkt $x$ in der konvexen Hülle $K$ der Punkte $x_1,..,x_m$ ist eine Konvexkombination

$$x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} f(x) = \langle a,x\rangle + b &= \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \langle a,x_k\rangle + B \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\right) \max_{1\leqslant k\leqslant m} \langle a,x_k\rangle + b \\ &= \langle a,x_{k_*}\rangle + b. \end{aligned}$$

denn das Maximum für wenigstens ein $k_*$ in $\{1,..,k\}$ angenommen werden. Also nimmt auch $f$ diesen Wert im zugehörigen Punkt $x_{k_*}$ an. ◃

2 Ist $A$ antisymmetrisch, also $A^\top = -A$, so ist $\mathrm{e}^A$ orthogonal.

▹ *Lösung* Da $A$ und $A^\top$ kommutieren, folgt mit der Exponenzialreihe $\exp(A)^\top = \exp(A^\top)$ und weiter

$$\exp(A)^\top \exp(A) = \exp(A^\top)\exp(A) = \exp(A^\top + A) = \exp(0) = I. \quad ◃$$

3 Es gilt

$$\mathrm{e}^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

▹ *Lösung* Es ist

$$J^2 = -I, \qquad J^3 = J^2 J = -J, \qquad J^4 = J^2 J^2 = I.$$

Die Diagonalelemente von $\mathrm{e}^{Jt}$ sind daher durch die geraden Potenzen von $J$ gegeben und gleich, und zwar

$$1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \mp .. = \cos t.$$

Die Nebendiagonalelemente von $\mathrm{e}^{Jt}$ sind daher durch die ungeraden Potenzen von $J$ gegeben und additiv invers. Und zwar steht unten links

$$t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \mp .. = \sin t. \quad ◃$$

4 Besitzt $A$ einen Eigenwert $\lambda < 0$, so besitzt die Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ wenigstens eine nichttriviale Lösung $x(t)$ mit $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

▹ *Lösung* Zu dem Eigenwert $\lambda < 0$ existiert ein reeller Eigenvektor $v$. Damit ist $x(t) = e^{\lambda t} v$ eine Lösung der Differenzialgleichung mit $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ ◃

5 *a.* Ist $\lambda$ ein Eigenwert von $A$, so ist $e^{\lambda}$ ein Eigenwert von $e^{A}$.
*b.* Es gibt keine $2 \times 2$-Matrix $L$ mit

$$e^{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

*c.* Ist $\|A - I\|$ hinreichend klein, so gibt es einen Operator $L$ mit $e^{L} = A$.
*d.* Inwieweit ist $L$ eindeutig bestimmt?

▹ *Lösung*
*a.* Aus $Av = \lambda v$ folgt $A^n v = \lambda^n v$ und damit

$$e^{A} v = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} A^n v = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \lambda^n v = e^{\lambda} v.$$

Also ist $v$ auch Eigenvektor von $e^{A}$ mit Eigenwert $e^{\lambda}$.
*b.* Für reelles $L$ gilt – siehe unten –

$$\det e^{L} = e^{\operatorname{sp} L} > 0.$$

Da die Determinate der rechten Seite negativ ist, gibt es also kein solches reelles $L$.
*c.* Es ist ja $_{9.6}$

$$\log(1 - t) = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} t^n, \qquad |t| < 1,$$

also

$$\log t = -\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} (1 - t)^n, \qquad 0 < t < 2.$$

Für $\|A - I\| < 1$ ist deshalb

$$L = \operatorname{Log} A := -\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} (I - A)^n$$

wohldefiniert, und wie im Reellen folgt mit dem Cauchyschen Produktsatz $_{??}$ $e^{L} = A$.
*d.* Bis auf eine Matrix $\Lambda$, die mit $L$ kommutiert und für die $e^{\Lambda} = I$ gilt. ◃