VL-8

Fundamentalsystem

$$\dot{x} = Ax$$

Wie findet man Lösungen?

1. Reelle Eigenwerte (EW):

v EV: $\quad Av = \lambda v$

Dann $\quad \varphi(t) = \underline{e^{\lambda t} v} \quad$ Lösung

2. Komplexe EW $\quad \lambda = \alpha \pm i\omega$

Def Komplexer EV: $\quad w = v + iu$:

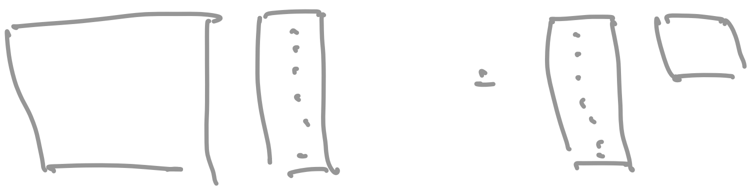
$$Aw = \lambda w \quad \text{in Komplexen}$$

$$A(v+iu) = (\alpha + i\omega)(v + iu)$$

$$\leadsto \begin{cases} Au = \alpha u + \omega v \\ Av = -\omega u + \alpha v \end{cases}$$

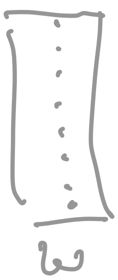
Ans:

$$A \underbrace{[u, v]}_{W} = \underbrace{[u, v]}_{W} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$



Also: $\boxed{A W = W \Lambda}$

Dann:



$$\varphi(t) = W e^{\Lambda t}$$

Refresher Cong:

$$\dot{\varphi}(t) = \underbrace{W \Lambda}\, e^{\Lambda t}$$

$$= A W e^{\Lambda t}$$

$$= A \varphi(t).$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit

$$W e^{\Lambda t} = W e^{\alpha t} e^{\omega J t}$$

$$= \underbrace{e^{\alpha t} \cdot \underbrace{W} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}}_{\text{Zwei reelle Lösungen.}}$$

3. Jordan-Block $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$

doppelte Nullst. EW λ

und geom. Vielfachheit 1:

1. Hauptvektor v : $Av = \lambda v$

2. Nebenvektor: w : $Aw = \lambda w + v$

Dann:

$$A \underbrace{[v, w]}_{W} = \underbrace{[v, w]}_{W} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

Also:

$$\boxed{AW = W\Lambda} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t) = W e^{\Lambda t}$$

Tahir Big

$$= e^{\lambda t}\, W \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{\Lambda t} = e^{\lambda I t} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t} = e^{\lambda t}\left(I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

1 Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Dgl-Systems

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_2$$
$$\dot{x}_3 = 2x_3.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

Jordan und fertig!

e^{At} direkt ausrechnen ...

EW $\quad 1, \; 1, \; 2$

$\lambda_1 = 2 \; : \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \; : \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

[illegible] v_3 :

$$A v_3 = 1 \cdot v_3 + v_2$$

$x + y = x + 1 \Rightarrow y = 1$

$y = y$

$2z = z \Rightarrow z = 0$

x „frei"

Also:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also Fundamentalsystem:

$$e^{2t}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad e^{t}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\&1\end{pmatrix}$$

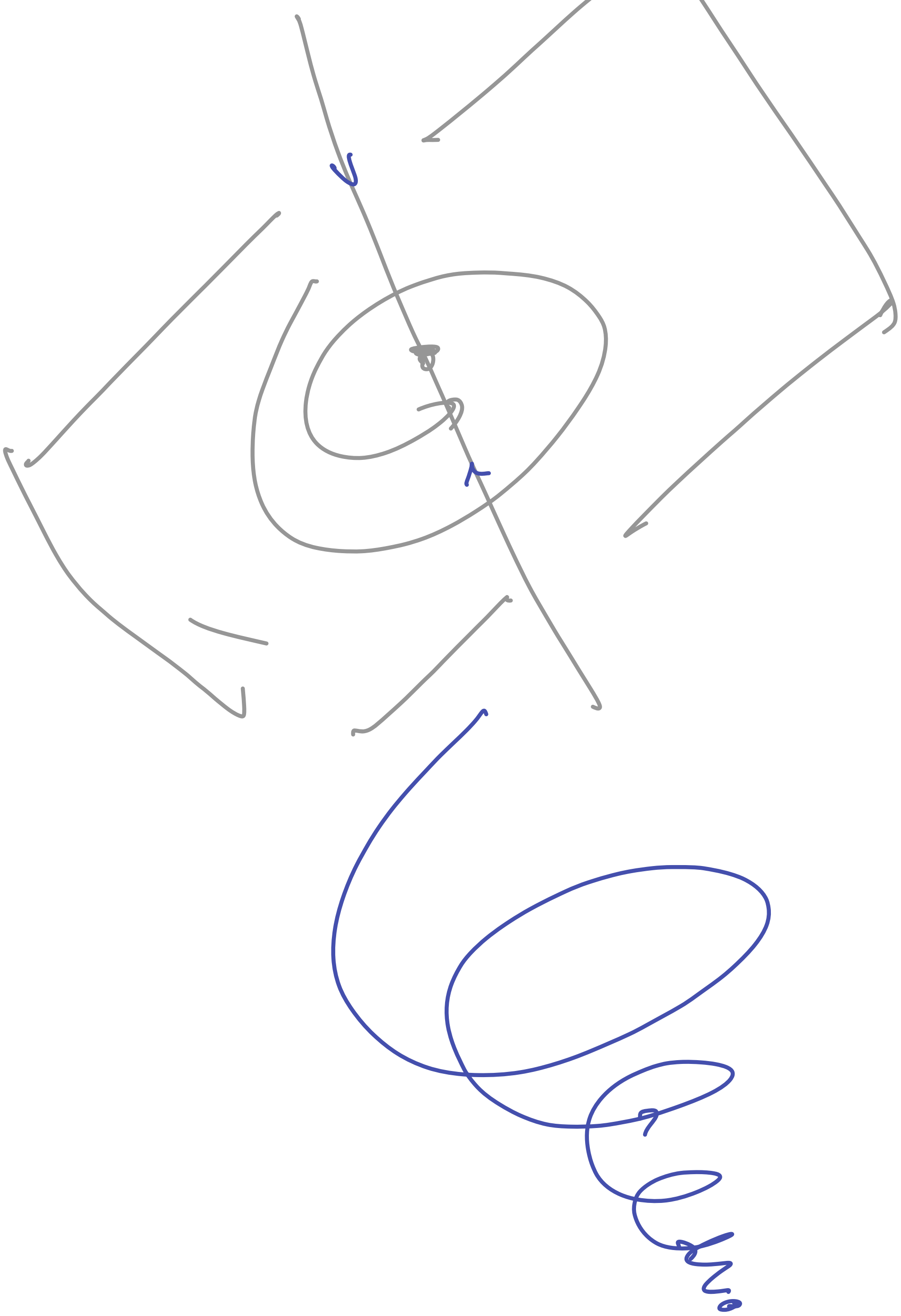
$$= e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e^{t}\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$$

Einfach anordnen wie e^{At}:

$$\begin{pmatrix}0 & e^{t} & te^{t}\\ 0 & 0 & e^{t}\\ e^{2t} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Excepții:

Dim = 3: $\lambda < 0$, $\alpha \pm i\omega$, $\alpha < 0$



2 Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Dgl-Systems

$$\dot{x}_1 = 3x_1$$
$$\dot{x}_2 = 3x_2 + x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_1 + 2x_3.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & 1 \\ 1 & & 2 \end{pmatrix}$$

EW : $3, 3, 2$

$\lambda_1 = 2$: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3$: $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

[illegible] :

$$\boxed{A v_3 = 3 v_3 + v_2}$$

$v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & 1 \\ 1 & & 2 \end{pmatrix}$:

$3x = 3x + 0$ ✓

$3y + z = 3y + 1 \Rightarrow z = 1$

$x + 2z = 3z \Rightarrow x = 1$

y "frei"

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem:

$$e^{2t} v_1 \,, \qquad [v_2, v_3]\, e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix}$$

Also:

$$e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{3t} v_2 \,, \qquad e^{3t} \left(t v_2 + v_3 \right)$$

$$\boxed{e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}}$$

3 Die aus einer Fundamentallösung in einem Koordinatensystem gebildete Matrix

$$M(t) = [\varphi_1(t), .., \varphi_n(t)]$$

heißt *Fundamentalmatrix*. Für diese gilt

$$M(t)M(t_0)^{-1} = e^{(t-t_0)A}$$

für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$. Unter welchen Bedingungen ist $M(t)$ eine 1-Parametergruppe?

$\dot x = Ax$

$$\dot\varphi(t) = A\varphi(t)$$

Fü $\Phi(t) = \varphi(t)\varphi(t_0)^{-1}$

$$\dot\Phi(t) = \dot\varphi(t)\varphi(t_0)^{-1} = A\varphi(t)\varphi(t_0)^{-1} = A\cdot\Phi(t)$$

sowie

$$\Phi(t_0) = I$$

Daher:

$$\Phi(t) = e^{(t-t_0)A} = e^{A(t-t_0)}$$

$$\varphi(t)\varphi(t_0)^{-1} = e^{A(t-t_0)}.$$

$$\varphi(t) = e^{A(t-t_0)}\varphi(t_0)$$

$\varphi(0) = I \iff I = e^{-At_0}\varphi(t_0)$

$$\varphi(t_0) = e^{At_0}.$$

4 Für welche Parameter a, b besitzt die Gleichung $\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0$ eine nichttriviale Lösung u

a. ohne Nullstellen,

b. mit endlich vielen Nullstellen,

c. mit unendlich vielen Nullstellen?

Vorbereitung: Gen Form :

$$x_1 = u$$

$$x_2 = \dot{u}$$

Dann :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{u} = -a\dot{u} - bu = -bx_1 - ax_2$$

Also :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

$$\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0$$

EW ... char. Polynom:

$$\det(A - \lambda I)$$

$$= \lambda^2 - (\operatorname{Sp} A)\lambda + \det A$$

$$= \lambda^2 + a\lambda + b\lambda^0$$

$$= \boxed{\ddot{u} + a\dot{u} + bu} \quad \Big| \; u^{(k)} \sim \lambda^k$$

Kar. Gl.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

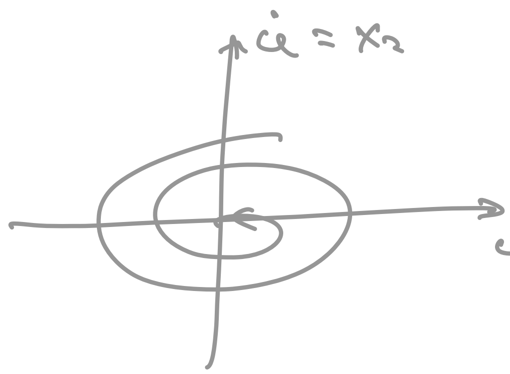
für die Nullstellen Formel ...

Diskriminante:

$$\Delta = a^2 - 4b$$

$\Delta < 0 \sim$ komplexe EW

$\sim$



$\sim \infty$ viele NS

$\Delta \geq 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Knoten an Stelle

$\rightsquigarrow \quad$ 0 oder 1 Nullstellen

feste Position auf